TEMA 5

EDOs i sistemes d'EDOs lineals

5.1 Sistemes de n equacions diferencials ordinàries EDOs lineals

Un sistema de n equacions diferencials lineals ordinàries (EDOs) és un sistema del tipus:

$$X' = A(t)X + b(t) \tag{1}$$

on,

- t és la variable independent.
- $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ és vector amb les funcions incògnites.
- $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ és la *matriu dels coeficients del sistema*, que són funcions definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. És a dir: $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, amb

$$\begin{array}{rcl} a_{i,j} : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & a_{i,j}(t) \end{array}$$

  per $i, j = 1, \dots, n$.
- $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és el *terme independent*, que és una funció vectorial de n components definida en l'interval $I \subseteq \mathbb{R}^n$.

Exemple 1. Un sistema de dues equacions diferencials lineals com

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}x_1 - \frac{e^t}{1+e^{2t}}x_2 + 1, \\ x_2' &= \frac{e^t}{1+e^{2t}}x_1 + \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}}x_2 + e^t, \end{aligned} \tag{2}$$

(veure problema 3, apartat (c)) es pot escriure matricialment en la forma (1):

$$X' = \frac{1}{1+e^{2t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}$$

on identifiquem,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \frac{1}{1+e^{2t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad I = \mathbb{R}.$$

Remarques:

- *Lineal* vol dir *Lineal en* X, no en t.
- Si la matriu A en (1) no depèn de t, i.e., si $A(t) \equiv A \in M_n(\mathbb{R})$, llavors direm que el sistema d'EDOs és *a coeficients constants*.
- Direm que (1) és un *sistema homogeni* si i només si (*sii*) el terme independent és idènticament igual a zero, i. e., sii $b(t) \equiv 0$.

Una solució del sistema (1) és una funció vectorial amb n components definida a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$, que satisfà idènticament el sistema per tot $t \in I$. És a dir, $X : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és solució del sistema (1) sii $X'(t) = A(t)X(t) + b(t)$ per tot $t \in I$. Així, per exemple,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + t + 1 \\ t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t - 1 \end{pmatrix}$$

és una solució del sistema (2) de l'exemple 1, definida per tot $t \in \mathbb{R}$. Exercici: comproveu-ho!

5.1.1 Estructura de les solucions

En aquest apartat donarem les idees bàsiques en relació a l'estructura de les solucions d'un sistema lineal. En el cas homogeni, veurem que aquestes formen un subespai vectorial (*sev*) amb la mateixa dimensió que la del sistema o, equivalentment, que el nombre funcions d'incògnites (o *variables dependents*). En el cas no homogeni, qualsevol solució es pot expressar com la suma d'una solució del sistema homogeni associat i una solució particular qualsevol del sistema complet. Comencem definint el Problema a Valors Inicials per sistemes lineals.

Definició 1. Un Problema a Valors Inicials (PVI) associat al sistema lineal (1) és de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X' & = & A(t)X + b(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

on *l'instant inicial*, $t_0 \in I$, i la *condició inicial*, (ci) $X_0 \in \mathbb{R}^n$, son dades del problema.

Aleshores, buscar la solució d'un PVI com (3), consisteix en cercar les solucions del sistema (1) que satisfan la ci $X(t_0) = X_0$ amb l'instant inicial $t_0 \in I$ i $X_0 \in \mathbb{R}^n$ donats.

Remarca 1. De vegades, quan parla de ci, es considera $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$; és a dir, s'inclou també l'instant inicial t_0.

El següent teorema, que donem sense demostrar, estableix que, si les funcions $A(t)$ i $b(t)$ són contínues a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$, llavors el PVI (3) té una única solució, definida a tot l'interval.

Teorema 5.1 (Existencia i unicitat de solucions per sistemes lineals)**.** *Si les funcions* $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ *i* $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *són contínues i* $t_0 \in I$*; llavors, per* $X_0 \in \mathbb{R}^n$*, el PVI (3) té exactament una solució que, a més, està definida en tot l'interval* I*.*

Remarca 2. Notem que la derivada de la solució és contínua en I. Per què?

Així, a partir d'ara suposarem que són contínues les funcions $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ i $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, on $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. A continuació, donem alguns exemples

Exemple 2. La solució del PVI lineal homogeni a coeficients constants

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^2,$$

és la funció vectorial:

$$X(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0,$$

definida per tot $t \in \mathbb{R}$.

Remarca 3. Notem que, en el cas de sistemes lineals, aquest teorema ens assegura que la solució del PVI està definida *a tot l'interval* I, mentre que el resultat general sobre existència i unicitat que vàrem estudiar al Tema 4 (*Fonaments d'Equacions Diferencials Ordinàries*) tan sols ens assegurava existència (i unicitat) local de les solucions, i. e., que aquestes estaven definides, necessàriament, en un cert entorn de l'instant inicial, t_0.

Exemple 3. La solució del PVI lineal no homogeni:

$$X' = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \ln t \end{pmatrix}, \qquad X(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

és una funció vectorial de classe C^1 en l'interval $I = (0, +\infty)$.

Exemple 4. La solució del PVI lineal no homogeni:

$$X' = \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1/(t-3) \\ 1/(t+2) \end{pmatrix}, \quad X(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

és una funció de classe C^1 a l'interval $I = (0, 3)$.

Cas homogeni

Estudiarem primer el cas en què el terme independent $b(t)$ en (1) és $b(t) \equiv 0$. Considerem doncs el sistema d'EDOs homogeni de dimensió n:

$$X' = A(t)X. \tag{4}$$

Proposició 1 (Linealitat)**.** *Les solucions del sistema homogeni (4) formen un subespai vectorial (sev) de dimensió n.*

Demostració. Sigui:

$$Z := \{\text{conjunt de les solucions del sistema lineal homogeni } X' = A(t)X\}.$$

És immediat (exercici!) comprovar que:

- $X_1, X_2 \in Z \Rightarrow X_1 + X_2 \in Z$.
- $\lambda \in \mathbb{R}, X \in Z \Rightarrow \lambda X \in Z$.

Per tant, que Z és un sev. Per a veure que $\dim Z = n$, prenem $t_0 \in I$ i establim l'aplicació lineal: $Z \ni X(t) \mapsto X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$. Ara, del teorema 5.1, es dedueix que l'aplicació és injectiva (unicitat) i exhaustiva (existència), per tant, $\dim Z = \dim \mathbb{R}^n = n$. $\square$

Definició 2. Un conjunt de m funcions $X_1, X_2, \ldots, X_m : I \to \mathbb{R}^n$ són linealment independents (*li*) quan de la identitat

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m \equiv 0 \tag{5}$$

amb $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ constants; es segueix, necessàriament, que $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.

Remarca 4. Observem que:

- Els coeficients de la *cl*, i. e., $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ són constants (no depenen de t), i
- (5) és una identitat en l'espai de funcions. És a dir,

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m \equiv 0 \Longleftrightarrow c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + \cdots + c_mX_m(t) = 0,$$

  per tot $t \in I$.

La següent proposició estableix quan un conjunt de n solucions del sistema homogeni $X' = A(t)X$ de dimensió n són *li* i, per tant, formen una base del seu sev de solucions.

Proposició 2. *Si $X_1 = X_1(t), X_2 = X_2(t), \ldots, X_n = X_n(t)$ són n solucions del sistema lineal homogeni $X' = A(t)X$, definides en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, i $\Phi(t)$ és la matriu que té per columnes aquestes solucions, i. e.:*

$$\Phi(t) := (X_1(t)|X_2(t)|\cdots|X_n(t)),$$

llavors:

$$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t) \text{ són li en } I \iff \det\Phi(t) \neq 0, \text{ per a tot } t \in I \iff \exists\, t_0 \in I \text{ t.q.: } \det\Phi(t_0) \neq 0,$$

En aquest cas, direm que les solucions $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ —base de l'ev de les solucions del sistema—, formen un Conjunt Fonamental de Solucions (CFS) i la matriu, $\Phi(t)$, se l'anomena Matriu Fonamental.

En particular, tota matriu fonamental $\Phi(t)$ és una *solució matricial*, i. e., satisfà:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t),$$

com es segueix d'immediat del fet que cadascuna de les columnes de $\Phi(t)$ és solució. És per això que la matriu fonamental també es coneix com *solució matricial fonamental*. De fet:

Proposició 3. *Si $\Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni (10) sii,*

- *$\Phi(t)$ és una solució matricial, i. e., satisfà: $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, i*
- *$\det\Phi(t) \neq 0$ per tot $t \in I$ o, equivalentment, $\exists t_0 \in I$ t. q. $\det\Phi(t_0) \neq 0$ (proposició 2).*

Demostració. Es dedueix directament de la proposició 2. □

D'altra banda, per un sistema lineal homogeni donat, clarament hi ha infinits CFS i, en conseqüència, infinites matrius fonamentals; com es dedueix de la proposició següent:

Proposició 4. *Si $\Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni n-dimensional $X' = A(t)X$ i $S \in M_n(\mathbb{R})$ és una matriu no singular (i. e., sii $\det S \neq 0$), llavors $\Psi(t) = \Phi(t)S$ és també una matriu fonamental.*

Demostració. Sigui $\Phi(t)$ una matriu fonamental i $S \in M_n(\mathbb{R})$ amb $\det S \neq 0$. Definim: $\Psi(t) = \Phi(t)S$; llavors:

$$\Psi'(t) = \Phi'(t)S = A(t)\Phi(t)S = A(t)\Psi(t),$$

amb la qual cosa $\Psi(t)$ és una solució matricial. D'altra banda:

$$\det\Psi(t) = \det\Phi(t) \cdot \det S \neq 0,$$

per tot $t \in I$. Per tant, d'acord amb la proposició 5.1.1, $\Psi(t)$ és una matriu fonamental. □

De la Proposició 1 i de la Proposició 2 es dedueix el,

Corol·lari 1 (Solució general del sistema homogeni)**.** *Si $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ són un CFS, del sistema lineal homogeni $X' = A(t)X$ de dimensió n. Aleshores, qualsevol altra solució, $X = X(t)$, es pot escriure com la cl:*

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + \cdots + c_n X_n(t), \tag{6}$$

on els coeficients $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ vénen donats per la solució del sistema:

$$\phi(t_0)c = X_0,$$

on $\Phi(t) = (X_1(t)|X_2(t)|\cdots|X_n(t))$ és la matriu fonamental corresponent al CFS donat, $t_0 \in I$ és un instant inicial qualsevol i $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$ és el valor que pren la solució $X = X(t)$ en aquest instant (i. e., la ci*). A la* cl *(6) amb $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ arbitraris (lliures) se l'anomena* solució general *del sistema homogeni.*

Exemple 5. Considerem el sistema d'EDOs lineal i homogeni:

$$X' = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} X. \tag{7}$$

Es comprova que:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}. \tag{8}$$

formen un CFS. En efecte; primer veurem que són solució:

$$A(t)X_1(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-t)e^{t^2/2} + (2t-2)e^{t^2/2} \\ (1-t)e^{t^2/2} + (2t-1)e^{t^2/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{t^2/2} \\ te^{t^2/2} \end{pmatrix} = X_1'(t),$$

per tot $t \in \mathbb{R}$; i anàlogament per $X_2(t)$:

$$A(t)X_2(t) = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2-t)e^t + (2t-2)e^t \\ 2(1-t)e^t + (2t-1)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = X_2'(t),$$

també per tot $t \in \mathbb{R}$. A continuació, comprovem que són *li*:

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{vmatrix} = -e^{t+t^2/2} \neq 0,$$

per tot $t \in \mathbb{R}$. Aleshores les solucions $X_t(t), X_2(t)$ en (8) formen un CFS de solucions, definit en tot $\mathbb{R}$, del sistema no lineal a coeficients no constants (7); amb la qual cosa la solució general d'aquest sistema (corol·lari 1) ve donada per la cl:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$ i $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Donat un sistema lineal homogeni de dimensió $n \geq 2$, $X' = A(t)X$; no hi ha, en general, un mètode per obtenir un CFS. Només sabem fer-ho en el cas de coeficients constants (veure exercici 2 on es dóna un breu resum pel cas de sistemes a coeficients constants de dimensió 2). Per sistemes de dimensió $n \geq 2$ a coeficients constants, tenim els resultats de les proposicions 5 i 6:

Proposició 5. *Si $v \in \mathbb{R}^n$ és un VEP de la matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, associat al VAP $\lambda \in \mathbb{R}$, i. e.: $Av = \lambda v$; aleshores $X(t) = e^{\lambda t} v$ és solució del sistema $X' = AX$, definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

Demostració: $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v$ està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i

$$X'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}v = \mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda v) = \mathrm{e}^{\lambda t}Av = A(\mathrm{e}^{\lambda t}v) = AX(t),$$

llavors $X(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}v$ és solució del sistema homogeni a coeficients constants $X' = AX$. □

Proposició 6. *Si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ són una base de $\mathbb{R}^n$ formada per VEPs de la matriu $A \in M_n(\mathbb{R})$, essent $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ els corresponents VAPs (és a dir: $Av_i = \lambda_i v_i$, per $i = 1, 2, \ldots, n$); aleshores:*

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1, X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}v_2, \ldots, X_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t}v_n$$

formen un CFS (i. e., n solucions li*) del sistema $X' = AX$, definides per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

Demostració: Per la proposició 5, cadascuna de les $X_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, són solució del sistema $X' = AX$, definides per a tot $t \in \mathbb{R}$. D'altra banda, la solució matricial

$$\Phi(t) = (X_1(t)|X_2(t)|\cdots|X_n(t)) = (\mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1|\mathrm{e}^{\lambda_2 t}v_2|\cdots|\mathrm{e}^{\lambda_n t}v_n)$$

verifica, per a $t = 0$:

$$\det \Phi(0) = \det(X_1(0)|X_2(0)|\cdots|X_n(0)) = \det(v_1|v_2|\cdots|v_n) \neq 0$$

atès que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ formen una base de $\mathbb{R}^n$ (i per tant són n vectors *li*). Aleshores, de la proposició 2 tenim que

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}v_1, X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}v_2, \ldots, X_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda_n t}v_n$$

formen un CFS del sistema $X' = AX$. □

Nosaltres no tractarem el aquí el cas general (dimensió $n > 2$) per sistemes a coeficients constants. Ens remeten a la discussió que ja es va fer a l'assignatura d'Àlgebra Lineal.

Cas no homogeni

Quant l'estructura de les solucions per sistemes no homogenis, $X' = A(t)X + b(t)$; es prova que, si disposem d'una solució qualsevol $X_p = X_p(t)$, podem escriure qualsevol altra solució, $X = X(t)$, com la suma:

$$X(t) = X_p(t) + X_h(t),$$

on $X_h(t)$ és una solució del sistema homogeni associat $X' = A(t)X$. Així, la *solució* general del sistema no homogeni (1) ve donada per la suma de la solució general del sistema homogeni associat (4) i *una* solució particular qualsevol del sistema no homogeni.

Tanmateix, si disposem d'un CFS d'aquest sistema homogeni, $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ o, equivalentment, d'una matriu fonamental $\Phi(t) = (X_1(t)|X_2(t)|\cdots|X_n(t))$; podem trobar una solució particular, $X_p(t)$, del sistema no homogeni mitjançant la *Fórmula de Variació de les Constants*, o *Fórmula de Variació dels Paràmetres*. Formalitzem aquest mètode a la proposició 7 següent:

Proposició 7 (Variació de les constants)**.** *Donat el sistema lineal:*

$$X' = A(t)X + b(t) \tag{9}$$

amb $A : I \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $b : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínues, essent $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, sigui:

$$X' = A(t)X \tag{10}$$

el sistema homogeni associat. Aleshores:

(1) Si $\Phi = \Phi(t), t \in I$ és una matriu fonamental de (10). És a dir, si $\Phi(t)$ satisfà:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$$

per a tot $t \in I$, llavors:

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

és una solució particular del sistema lineal no homogeni (9) definida per a tot $t \in I$. La fórmula (11) es coneix com fórmula de variació de les constants o fórmula de variació dels paràmetres.

(2) La solució general de (9), $X = X(t)$, ve donada per la suma

$$X(t) = X_h(t) + X_{nh}(t),$$

on $X_h = X_h(t)$ és la de la solució general del sistema homogeni (10), i. e.:

$$X_h(t) = \Phi(t)c,$$

$t \in I$, amb $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ arbitrari (lliure), mentre que $X_{nh} = X_{nh}(t)$ és una solució qualsevol del sistema no homogeni (9). Per exemple, podem agafar $X_{nh} = X_p(t)$, i llavors la solució general de (9) s'escriu com:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

$t \in I$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ arbitrari (lliure).

(3) Donats $t_0 \in I$ i $X_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s, \tag{13}$$

$t \in I$, és (l'única!) solució del sistema (9) que satisfà la ci *$X(t_0) = X_0$, (i. e., (13) és l'única solució del PVI donat pel sistema (9) i la* ci *$X(t_0) = X_0$, amb $t_0 \in I$).*

Demostració. *(1)* Es comprova directament derivant. En efecte:

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= \Phi'(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\ &= A(t)\Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t + b(t) = A(t)X_p(t) + b(t) \end{aligned}$$

per a tot $t \in I$; i llavors $X_p = X_p(t)$, $t \in I$, donada per (11) és solució del sistema no homogeni (9). El punt *(3)* és una comprovació directa del mateix tipus; mentre que la unicitat és segueix del teorema d'existència i unicitat 5.1 per sistemes lineals. Finalment, *(2)* es dedueix de *(3)* (es deixen els detalls al lector). □

Remarca 5. La integral

$$\int \Phi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t,$$

que apareix en (11) denota una primitiva qualsevol. En particular es pot fer servir una funció integral. Així per exemple, per a $t_0 \in I$ arbitrari, la fórmula de variació dels paràmetres es pot escriure com

$$X_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s, \tag{14}$$

$t \in I$. En particular, notem que aquesta solució satisfà $X_p(t_0) = 0$.

Exemple 6. sigui el sistema no homogeni,

$$X' = \begin{pmatrix} 2-t & 2t-2 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Recordem (exemple 5) que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix}$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat (8). Aleshores, aplicant la fórmula de variació de les constants (11):

$$X_p(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t) \mathrm{d}t = \Phi(t) \int \frac{1}{\det \Phi(t)} \begin{pmatrix} e^t & -2e^t \\ -e^{t^2/2} & e^{t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= -\Phi(t) \int e^{-t-t^2/2} \begin{pmatrix} -te^t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \Phi(t) \int \begin{pmatrix} te^{-t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 2e^t \\ e^{t^2/2} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{t^2/2} + c_1 \\ 0 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

on agafem $c_1 = c_2 = 0$ (remarca 5).

Remarca 6. Per invertir matrius 2×2, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ (ó $M_2(\mathbb{C})$), resulta útil la fórmula:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Així la solució general de (15) s'escriu, d'acord amb (12), com

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

definida per tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

A continuació buscarem la solució del sistema (15) corresponent a la *ci*:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Si imposem aquesta *ci* a la solució general (16), obtenim el sistema

$$X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

el qual té per solució: $c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$, $c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$.

Aleshores, la solució del PVI donat pel sistema (15) i la *ci* (17) resulta:

$$X(t) = 1 \cdot \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + e^{t^2/2} + 2e^t \\ -1 + e^{t^2/2} + e^t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

5.2 EDOs lineals d'ordre n

Començarem definint què s'entén per EDO lineal d'ordre n.

Definició 3. Una EDO lineal s'ordre n és una equació de la forma:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{18}$$

on,

- t és la variable independent.
- $y = y(t)$, funció almenys n cops derivable, és la funció incògnita o *variable dependent*.
- $a_0, a_1, \ldots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval; són funcions donades amb $a_n(t) \not\equiv 0$ (i. e., la funció $a_n(t)$ no és idènticament zero).

De vegades, a la funció $f(t)$ se l'anomena *terme independent* de l'EDO lineal.

Exemple 7. D'acord amb la definició 3, l'EDO,

$$t^2y'' + (\sin t)y' + y = \mathrm{e}^t, \tag{19}$$

és una EDO lineal d'ordre $n = 2$ on, de (18), identifiquem: $a_2(t) = t$, $a_1(t)$, $a_0(t) \equiv 1$ i $f(t) = \mathrm{e}^t$.

Remarca 7. En particular,

- L'EDO (18) és homogènia sii $f(t) \equiv 0$.
- L'EDO (18) és a coeficients constants quan $a_0(t) \equiv a_0, a_1(t) \equiv a_1, \ldots, a_n(t) \equiv a_n$, on les quantitats $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ són constants (no depenen de t).

5.2.1 Estructura de les solucions

Bona part dels resultats d'aquesta secció es dedueixen del fet, ja esmentat al Tema 4 (*Fonaments d'Equacions Diferencials Ordinàries*), de què les EDOs lineals d'ordre n de la forma (18) es poden expressar com sistemes de n EDOs lineals de primer ordre (1). En efecte, si $a_n(t) \neq 0$ per tot $t \in I$, tenim d'una banda que l'EDO (18) es pot expressar en *forma normal*, aïllant $y^{(n)}$ en funció de la resta de les derivades:

$$y^{(n)} = -\frac{a_0(t)}{a_n(t)}\, y - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}\, y' - \cdots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\, y^{(n-1)} + \frac{f(t)}{a_n(t)};$$

i si a continuació introduïm les noves variables dependents:

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'', \ldots, x_{n-1} = y^{(n-2)},\ x_n = y^{(n-1)},$$

es deriva un sistema de la forma $X' = A(t)X + b(t)$, amb

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix},\ A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_1(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_2(t)}{a_n(t)} & -\frac{a_3(t)}{a_n(t)} & \cdots & -\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix},\ b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}.$$

Exemple 8. L'EDO del (19) exemple 7 es pot reescriure com el sistema d'EDOs de primer ordre i dimensió 2 de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{\sin t}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t^2} \end{pmatrix},$$

on $x_1 = y$, $x_2 = y'$ i $I = (0, +\infty)$, per exemple.

A partir d'aquest principi resulta immediata l'extensió del Teorema d'existència i unicitat 5.1 al cas d'EDOS lineals d'ordre n. Abans d'establir aquest resultat, adaptarem la definició de PVI (definició 1) al context d'EDOs lineals.

Definició 4. Un Problema a Valors Inicials *(PVI)* associat a l'EDO (18) ve definit per un instant inicial $t_0 \in I$ i un conjunt de n *condicions inicials* (*ci*), i. e.,

$$\begin{cases} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{20}$$

on l'instant inicial $t_0 \in I$ i les *ci* $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}$ són dades del problema.

Notem que la Remarca 1 s'aplica també en aquest cas: de vegades, quan es parla de *ci* es considera $(t_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in I \times \mathbb{R}^n$, incloent-hi també el temps inicial t_0.

Teorema 5.2. *Si suposem $a_0, a_1, \ldots, a_n, f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, són contínues, $a_n(t) \neq 0$ per tot $t \in I$ i $t_0 \in I$; aleshores, per qualsevol $(y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$ el PVI (20) té exactament una solució, $y = y(t)$, definida en tot l'interval I.*

Remarca 8. La solució $y = y(t)$ és almenys n cops derivable en I. De fet és de classe C^n en I. Per què?

Tanmateix emfasitzem que, com passava al teorema 5.1 (veure Remarca 3), aquí la solució del PVI també és *global*: està definida en tot l'interval I, i no només en un entorn de t_0 (com ara succeeix al *Teorema d'Existència i Unicitat* pel cas general d'EDOs d'ordre n).

D'ara endavant, suposarem que treballem sota les hipòtesis del Teorema 5.2, i. e., que les funcions $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t), f(t)$ són contínues a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i $a_n(t) \neq 0$ en I.

Cas homogeni

Considerem primer el cas homogeni, l'EDO lineal d'ordre n (18) amb $f(t) \equiv 0$, i. e.:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{21}$$

A continuació, del fet que l'EDO (21) es pugui expressar com un sistema de n EDOs lineals de primer ordre es segueix la Proposició 8 per EDOs lineals —anàloga a la Proposició 1 per sistemes.

Proposició 8. *El conjunt, Z, de les solucions de l'EDO lineal homogènia (21) formen un sev de dimensió n.*

Definició 5. Donades n solucions qualssevol de l'EDO (21): $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, considerem la matriu:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

El seu determinant,

$$W(t) = W[y_1, y_2, \dots, y_n](t) := \det \Phi(t)$$

s'anomena *Wronskià* del conjunt de solucions $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$.

La següent proposició caracteritza la independència lineal d'un conjunt de n solucions d'una EDO homogènia d'ordre n.

Proposició 9. *Sigui $W(t) = W[y_1, y_2, \dots, y_n](t)$ el Wronskià corresponent a les solucions $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$ de l'EDO lineal homogènia d'ordre n (21). Llavors:*

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \text{ són li } \iff W(t) \neq 0 \ \forall t \in I \iff \exists\, t_0 \in I \text{ t. q.: } W(t_0) = 0.$$

En aquest cas les solucions $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ formen un CFS *(21).*

Remarca 9. Si $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ són un CFS, llavors la matriu (22) és una matriu fonamental de sistema lineal homogeni de primer ordre i dimensió n associat a l'EDO lineal homogènia d'ordre n.

Proposició 10. *donat un CFS $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t)$ de l'EDO homogènia d'ordre n (21), qualsevol altra solució $y = y(t)$ es pot expressar com la cl*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \tag{23}$$

on els coeficients $c_1, c_2, \dots, c_n$ vénen donats per la solució del sistema,

$$\Phi(t_0)c = y(t_0),$$

on $\Phi(t)$ és la matriu (22). La cl (23) amb coeficients $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures), rep el nom de solució general de l'EDO homogènia.

Exemple 9. Considerem l'EDO lineal homogènia d'ordre 2,

$$ty'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = 0, \qquad t \in I = (0, +\infty). \tag{24}$$

Es comprova que $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t$ formen un CFS. En efecte; comprovem primer que són solució:

$$\begin{aligned} ty_1''(t) - 2(1+t)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) &= t\mathrm{e}^t - 2(1+t)\mathrm{e}^t + (t+2)\mathrm{e}^t = (t-2-2t+t+2)\mathrm{e}^t = 0, \ \forall\, t \\ ty_2''(t) - 2(1+t)y_2'(t) + (t+2)y_2(t) &= t(6t+6t^2+t^3)\mathrm{e}^t - 2(1+t)(3t^2+t^3)\mathrm{e}^t + (t+2)t^3\mathrm{e}^t \\ &= (6t^2+6t^3+t^4-6t^2-2t^3-6t^3-2t^4+t^4+2t^3)\mathrm{e}^t = 0, \ \forall\, t. \end{aligned}$$

Com a més,

$$W(t) = \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & t^3\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & (3t^2+t^3)\mathrm{e}^t \end{vmatrix} = 3t^2\mathrm{e}^{2t} \neq 0,$$

per $t > 0$ (o per $t < 0$); resulta (proposició 9) que són solucions *li* a l'interval $I = (0, +\infty)$ (també a $I' = (-\infty, 0)$) de l'EDO (24) y llavors formen un CFS. Per tant, per la proposició (10), la solució general s'escriu com

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t^3 \mathrm{e}^t, \tag{25}$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures) i notem que està definida per tot $t \in \mathbb{R}$.

Anàlogament al que succeïa quan estudiàvem els sistemes lineals homogenis, no sabem, en general, calcular les solucions d'EDOs lineals homogènies d'ordre $n \geq 2$ *que no tinguin coeficients constants* (veure el problema 5 per un resum de les solucions de les EDOs lineals de 2^{on} ordre a coeficients constants). El que sí tenim és un mètode per a calcular, a partir d'una solució coneguda, una altra *li*. És l'anomenat *Mètode de Reducció de l'Ordre*. Aquí no discutirem el cas general, sinó només la seva aplicació per EDOs de 2^{on} ordre.

Proposició 11 (Mètode de reducció de l'ordre)**.** *Sigui l'EDO homogènia de* 2^{on} *ordre:*

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \tag{26}$$

amb $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ *funcions contínues definides en un interval* $I \subseteq \mathbb{R}$*. Sigui* $y_1 = y_1(t)$*,* $t \in I$*, una solució no trivial (i. e., no idènticament igual a zero). Suposem a més que* $a_2(t)$ *no s'anul·la en* I *(i. e., que* $a_2(t) \neq 0$ *per tot* $t \in I$*).*

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \tag{27}$$

és una segona solució de (26)*,* li *amb* $y_1(t)$*. Ens referirem a l'equació* (27) *com la Fórmula de Reducció de l'Ordre.*

Demostració. És una comprovació directa que deixarem com exercici al lector.

Remarca 10. A l'hora d'aplicar la fórmula (27), no caldrà afegir les "constants d'integració" perquè, de fet només necessitem *una* primitiva qualsevol.

Remarca 11. "Reducció de l'ordre", originalment, fa referència al fet que si suposem coneguda una solució, $y_1(t)$, llavors es pot trobar una segona *li* amb aquesta, $y_2(t)$, resolent una EDO lineal un ordre inferior al de l'EDO original: per exemple (com ara a la proposició 11), en el cas d'una EDO de 2^{on} ordre, la segona solució s'obtindria a partir la solució una EDO de 1^{er} ordre.

Exemple 10. Sabent que $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ és solució de l'EDO homogènia (24) de l'exemple 9, podem aplicar el mètode de reducció de l'ordre i obtenir una segona solució *li* amb aquesta.

En efecte, ja vàrem comprovar a l'exemple 9 que $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ és una solució de l'EDO homogènia. Aleshores, aplicant la fórmula (27) amb $a_2(t) = t$, $a_1(t) = -2(1+t)$ i $a_0(t) = t+2$; s'obté:

$$\tilde{y}_2(t) = \mathrm{e}^t \int \frac{1}{\mathrm{e}^{2t}} \exp\left(\int \left(2 + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2\ln t + 2t} = \mathrm{e}^t \int t^2 \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\mathrm{e}^t$$

i observem que si $\tilde{y}_2(t) = t^3\mathrm{e}^t/3$ és una solució de l'EDO *lineal* homogènia *li* amb $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = 3\tilde{y}_2(t) = t^3\mathrm{e}^t$ també ho és. Per tant,

$$y_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t$$

són dues solucions *li* de l'EDO (24); amb la qual cosa la seva solució general ve donada per la cl (23).

Trobareu més exemples d'aplicació de la Fórmula de Reducció de l'Ordre a la resolució del problema 4.

Cas no homogeni

Com al cas de sistemes d'EDOs lineals, la solució general d'una EDO no homogènia com (18) ve donada per la suma

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

on $y_h(t)$ és la solució general de l'EDO homogènia associada (21) i $x_p(t)$ és *una* solució particular qualsevol de l'EDO no homogènia. Per la proposició (23), sabem que $x_h(t)$ és *cl*, amb coeficients arbitraris, d'un CFS. Així, si disposem d'un CFS, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, la solució general s'escriu com:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + y_p(t) \tag{28}$$

amb $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Com ja hem comentat, no tenim un mètode general per trobar un CFS de l'EDO homogènia; però —com passava amb als sistemes d'EDOs lineals—, si disposem d'un CFS de l'EDO homogènia associada, podem trobar una solució particular de l'EDO no homogènia mitjançant el *Mètode de Variació de les Constants* o *Mètode de Variació dels Paràmetres*, i llavors escriure completament la solució general.

Proposició 12 (Mètode de Variació de les Constants)**.** *Donada l'EDO lineal d'ordre* n

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{29}$$

on suposem:

(H1) $a_0, a_1, \ldots, a_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínues, amb* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval.*

(H2) $a_n(t)$ *no s'anul·len cap punt de* I*.*

Si coneixem un CFS: $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$*, definit per a* $t \in I$*, de l'EDO homogènia associada a* (29)*,*

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{30}$$

Aleshores una solució particular, $y_p = y_p(t)$ *de l'EDO no homogènia* (29) *ve donada per la cl:*

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t), \tag{31}$$

$t \in I$*; on* $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \ldots, u_n = u_n(t)$ *són funcions de classe* C^1 *en l'interval* I*, que satisfan el sistema:*

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) & \cdots & y_n''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(t) & y_2^{(n-2)}(t) & y_3^{(n-2)}(t) & \cdots & y_n^{(n-2)}(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{f(t)}{a_n(t)} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

per tot $t \in I$*.*

El sistema (32) es pot resoldre, per exemple, pel mètode de Cramer, obtenint-se així les derivades $u_1'(t), u_2'(t), \ldots, u_n'(t)$ i posteriorment primitivitzar per trobar cadascuna de les $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$. Finalment, la *cl* (31) ens dóna una solució particular.

Per resoldre els exercicis d'aquest tema, resultarà particularment útil disposar de fórmules explícites per EDOs de 2^{on} ordre, com les que es donen a continuació al Corol·lari 2.

Corol·lari 2 (Variació de les constants per EDOs lineals de 2^{on} ordre)**.** *En el c. p.* $n = 2$*; i. e., per EDOs de* 2^{on} *ordre de la forma:*

$$a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \tag{33}$$

amb $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ *i* $f(t)$ *satisfent les hipòtesis* (H1) *i* (H2) *de la proposició 12; és fàcil comprovar (exercici!) que:*

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t \tag{34}$$

on $W(t)$ *és el Wronskià del CFS* $y_1(t), y_2(t)$ *donat, és a dir, el determinant*

$$W(t) = W[y_1, y_2](t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix};$$

i llavors la solució pel mètode de variació de les constants resulta:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(t)\int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{35}$$

Exemple 11. Si volem una solució particular de l'EDO lineal de segon ordre no homogènia

$$tx'' - 2(1+t)y' + (t+2)x = 2\mathrm{e}^t. \tag{36}$$

podem usar el CFS de l'EDO homogènia

$$y_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t;$$

el qual té per Wronskià: $W(t) = 3t^2\mathrm{e}^{2t}$ (veure exemples 9 i 10); i aplicar la fórmula (35) per trobar una solució particular de l'EDO no homogènia,

$$y_p(t) = -\mathrm{e}^t \int \frac{t^3\mathrm{e}^t 2\mathrm{e}^t}{t3t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t + t^3\mathrm{e}^t \int \frac{\mathrm{e}^t 2\mathrm{e}^t}{t3t^2\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^t \int \mathrm{d}t + \frac{2}{3}t^3\mathrm{e}^t \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{2}{3}t\mathrm{e}^t - \frac{t}{3}\mathrm{e}^t = -t\mathrm{e}^t.$$

La solució general de (36) és la suma de la solució general de l'EDO homogènia associada i la solució particular trobada de la no homogènia:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2t^3\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t \tag{37}$$

definida per tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

A continuació, considerem el PVI definit per l'EDO (36) i les *ci*: $x(1) = 0$, $x'(1) = 0$. La derivada de $y(t)$ és:

$$y'(t) = c_1\mathrm{e}^t + 3c_2t^2\mathrm{e}^2 + c_2t^3\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t = c_1\mathrm{e}^t + c_2(3t^3 + t^3)\mathrm{e}^t - (t+1)\mathrm{e}^t. \tag{38}$$

Aplicant les *ci* a les equacions (37) i (38) s'obté el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcccc} y(1) & = & \mathrm{e}c_1 + \mathrm{e}c_2 - \mathrm{e} & = & 0 \\ y'(1) & = & \mathrm{e}c_1 + 4\mathrm{e}c_2 - 2\mathrm{e} & = & 0 \end{array}\right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el qual té per solució: $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$; amb la qual cosa la solució del PVI donat resulta:

$$y(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^t + \frac{t^3}{3}\mathrm{e}^t - t\mathrm{e}^t.$$

Vegeu més exemples a la resolució dels problemes 4, 5, 6.

5.3 Problemes

5.3.1 Sistemes d'EDOS lineals de primer ordre

1. (a) Sigui $A(t)$ una matriu $n \times n$ depenent de t i sigui $\lambda(t)$ un valor propi de $A(t)$ que compleix la propietat que admet un vector propi $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que no depèn de t. Això és, v compleix la relació $A(t)v = \lambda(t)v$. Llavors, demostreu que

$$X(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t}v,$$

és una solució del sistema d'EDOs lineals homogeni $X' = A(t)X$.

(b) Trobeu la solució general del sistema d'EDOs següents:

i. $X' = t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}X.$

ii. $tX' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} X$, si $t > 0$.

iii. $X' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix} X$, si $t > 0$.

◁ **Solució.** *(a)* És una comprovació directa. En efecte, si $X(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t} v$, derivant:

$$X'(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t} v = \mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t} \lambda(t) v \underset{A(t)v=\lambda(t)v}{=} \mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t} A(t) v = A(t)\mathrm{e}^{\int \lambda(t)\,\mathrm{d}t} v = A(t)X(t)$$

on, com s'assenyala, tenim en compte al segon pas que $\lambda = \lambda(t)$ és un VAP de la matriu $A(t)$ i v és un VEP associat, i.e., que: $A(t)v = \lambda(t)v$.

(b)-i. En aquest cas, la matriu del sistema $X' = A(t)X$, és:

$$A(t) = t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & -t \\ 4t & -3t \end{pmatrix} \tag{39}$$

i té per polinomi característic

$$p_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_2)\lambda^2 + t\lambda - 2t^2 = (\lambda + 2t)(\lambda - t), \tag{40}$$

on denotem per $I_n = \mathrm{diag}[1, 1, \ldots, 1] \in M_n(\mathbb{R})$ la matriu identitat $n \times n$ (en aquest cas $n = 2$). Els VAPs vénen donats per les arrels de (40), i són en aquest cas:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = -2t, \qquad \lambda_2 = \lambda_2(t) = t.$$

Remarca 12. Quan la matriu A és 2×2, el polinomi característic ve donat per la fórmula:

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A), \tag{41}$$

on $\mathrm{Tr}(A)$ i $\det(A)$ són, respectivament, la traça i el determinant de A.

Per buscar els VEPs associats, calculem:

- Per $\lambda_1 = \lambda_1(t) = -2t$:

$$\mathrm{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t)I_2) = \mathrm{Nuc}(A(t) + 2tI_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 4t & -t \\ 4t & -t \end{pmatrix} = \left\langle (1,4)^\top \right\rangle.$$

- Idènticament, per $\lambda_2 = \lambda_2(t) = t$:

$$\mathrm{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \mathrm{Nuc}(A(t) - tI_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} t & -t \\ 4t & -4t \end{pmatrix} = \left\langle (1,1)^\top \right\rangle.$$

Així doncs, els VAPs i els VEPs trobats per a la matriu (39) són:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= -2t, & v_1 &= (1,4)^\top, \\ \lambda_2(t) &= t, & v_2 &= (1,1)^\top. \end{aligned} \tag{42}$$

Tanmateix, veiem que cap dels dos VEPs que apareixen a (42) depenen de t i aleshores del resultat de l'apartat *(a)* es deriven les dues solucions següents:

$$X_1 = X_1(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_1(t)\,\mathrm{d}t} v_1 = \mathrm{e}^{-\int 2t\,\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$X_2 = X_2(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_2(t)\,\mathrm{d}t} v_2 = \mathrm{e}^{\int t\,\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t^2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

definides per a $t \in I = \mathbb{R}$. A més, aquestes solucions són *li*, ja que la corresponent solució matricial (i. e., la matriu que té per columnes les solucions $X_1 = X_1(t)$ i $X_2 = X_2(t)$ donades per (43) i (44) respectivament), $\Phi = \Phi(t)$, és

$$\Phi(t) := (X_1(t)|X_2(t)) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 4\mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix}, \qquad \text{tenim: } \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 4\mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \end{vmatrix} = -3\mathrm{e}^{-t^2/2} < 0$$

i per tant $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Notem que en virtut de la proposició 2 és suficient comprovar que $\det \Phi(t_0) \neq 0$ per a algun $t_0 \in I$ ($= \mathbb{R}$ en aquest cas); per exemple, per a $t_0 = 0$, tenim $\det \Phi(0) = -3 \neq 0$.

Finalment, la solució general del sistema és *cl*) d'aquestes dues solucions. Així:

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 \mathrm{e}^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{t^2/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per a $t \in I = \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). Aquesta solució es pot expressar en forma matricial, fent servir la matriu fonamental $\Phi = \Phi(t)$, i. e.:

$$X(t) = \Phi(t) c = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 4\mathrm{e}^{-t^2} & \mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \mathrm{e}^{-t^2} + c_2 \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 4c_1 \mathrm{e}^{-t^2} + c_2 \mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix},$$

per a $t \in I = \mathbb{R}$ i $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-ii. A partir de la matriu del sistema,

$$A(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & 3/t \\ -2/t & -4/t \end{pmatrix}, \qquad t > 0 \tag{45}$$

busquem el polinomi característic (veure remarca 12):

$$p_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_2) = \lambda^2 - \operatorname{Tr} A(t) \lambda + \det A(t) = \lambda^2 + \frac{3}{t}\lambda + \frac{2}{t^2} = \left(\lambda + \frac{1}{t}\right)\left(\lambda + \frac{2}{t}\right)$$

i les seves arrels; d'on tenim que els VAPs són, per aquest sistema:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = -\frac{1}{t}, \qquad \lambda_2 = \lambda_2(t) = -\frac{2}{t}.$$

Per trobar els VEPs associats, calculem els vectors que generen $\operatorname{Nuc}(A(t) - \lambda_i(t) I_2)$ per $i = 1, 2$. Això dóna:

- Per $\lambda_1 = \lambda_1(t) = -1/t$:

$$\operatorname{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t) I_2) = \operatorname{Nuc}\left(A(t) + \frac{1}{t} I_2\right) = \operatorname{Nuc}\begin{pmatrix} 2/t & 3/t \\ -2/t & -3/t \end{pmatrix} = \left\langle (3, -2)^\top \right\rangle.$$

- Per $\lambda_1 = \lambda_1(t) = -2/t$:

$$\mathrm{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \mathrm{Nuc}\left(A(t) + \frac{2}{t}I_2\right) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 3/t & 3/t \\ -2/t & -2/t \end{pmatrix} = \left\langle (1,-1)^\top \right\rangle.$$

Així doncs, els VAPs de la matriu (45) i els seus VEPs associats són:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= -1/t, \quad v_1 = (3,-2)^\top, \\ \lambda_2(t) &= -2/t, \quad v_2 = (1,-1)^\top. \end{aligned} \tag{46}$$

Com que cap dels dos VEPs depenen de t, podem calcular dues solucions del sistema a partir dels resultats de l'apartat *(a)*. En concret, per a $t > 0$ tenim les solucions:

$$X_1 = X_1(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_1(t)\,\mathrm{d}t} v_1 = \mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}t/t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-\ln t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$X_2 = X_2(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_2(t)\,\mathrm{d}t} v_2 = \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}t/t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2\ln t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

A més aquestes solucions són *li* en $I = (0, +\infty)$. En efecte, si construïm una solució matricial, $\Phi = \Phi(t)$, amb les solucions $X_1(t)$ i $X_2(t)$ donades per (47) i (48), i. e., la matriu

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

definida per a $t \in I = (0, +\infty)$; veiem que el seu el determinant és

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{t^3} < 0,$$

amb la qual cosa $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t > 0$ (equivalentment, $\Phi(t)$ està definida per a tot $t > 0$ i, per exemple, $\det \Phi(1) = -1 \neq 0$, veure proposició (2), i llavors (49) defineix una matriu fonamental. La solució general s'obté com *cl* del CFS obtingut:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3/t \\ -2/t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/t^2 \\ -1/t^2 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). En notació matricial, podem escriure la solució a partir de la matriu fonamental, $\Phi = \Phi(t)$, com:

$$X(t) = \Phi(t)c = \begin{pmatrix} 3/t & 1/t^2 \\ -2/t & -1/t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1/t + c_2/t^2 \\ -2c_1/t - c_2/t^2 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b)-iii. La matriu $A(t)$ del sistema és, en aquest apartat:

$$A(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \ln t + 1 & \ln t - 1 \\ \ln t - 1 & \ln t + 1 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

definida per a $t > 0$. El seu polinomi característic ve donat per,

$$p_{A(t)}(t) = \det(A(t) - \lambda I_2) = \lambda^2 - \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A) =$$
$$\lambda^2 - (\ln t + 1)\lambda + \frac{1}{4}\left((\ln t + 1)^2 - (\ln t - 1)^2\right) = \lambda^2 - (\ln t + 1)\lambda + \ln t = (\lambda - \ln t)(\lambda - 1)$$

(veure remarca 12) i les seves arrels donen els VAPs, que śon:

$$\lambda_1 = \lambda_1(t) = 1, \qquad \lambda_2 = \lambda_2(t) = \ln t$$

per a $t > 0$. Pel càlcul dels VEPs associats, fem

- Per $\lambda_1(1) = 1$:

$$\operatorname{Nuc}(A(t) - \lambda_1(t)I_2) = \operatorname{Nuc}(A(t) - I_2) = \operatorname{Nuc}\begin{pmatrix} \dfrac{\ln t - 1}{2} & \dfrac{\ln t - 1}{2} \\ \dfrac{\ln t - 1}{2} & \dfrac{\ln t - 1}{2} \end{pmatrix} = \left\langle (1, -1)^\top \right\rangle.$$

- Per $\lambda_2(t) = \ln t$:

$$\operatorname{Nuc}(A(t) - \lambda_2(t)I_2) = \operatorname{Nuc}(A(t) - (\ln t)I_2) = \operatorname{Nuc}\begin{pmatrix} \dfrac{1 - \ln t}{2} & \dfrac{\ln t - 1}{2} \\ \dfrac{\ln t - 1}{2} & \dfrac{1 - \ln t}{2} \end{pmatrix} = \left\langle (1, 1)^\top \right\rangle.$$

D'aquesta manera els VAPs i els VEPs associats de la matriu (50) són:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= 1, & v_1 &= (1, -1)^\top, \\ \lambda_2(t) &= \ln t, & v_2 &= (1, 1)^\top; \end{aligned} \tag{51}$$

a partir del quals —usant els resultats de l'apartat *(a)* — es deriven les solucions $X_1 = X_1(t)$ i $X_2 = X_2(t)$ donades per (52) i (53) respectivament, i. e.,

$$X_1 = X_1(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_1(t)\,\mathrm{d}t} v_1 = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$X_2 = X_2(t) = \mathrm{e}^{\int \lambda_2(t)\,\mathrm{d}t} v_2 = \mathrm{e}^{\int \ln t\,\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{t\ln t - t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Aquestes dues solucions formen un CFS definit en l'interval $I = (0, +\infty)$, ja que si considerem la corresponent solució matricial

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \end{pmatrix}, \tag{54}$$

el seu determinant és

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \end{vmatrix} = 2\mathrm{e}^{t\ln t} > 0$$

i aleshores $\det \Phi(t) \neq 0$ per a tot $t \in I = (0, +\infty)$. En particular (54) és una matriu fonamental, amb la qual cosa la solució general del sistema $X' = A(t)X$ —amb $A(t)$ donada per (50)— s'escriu doncs com *cl* de les dues solucions *li* obtingudes $X_1(t)$ i $X_2(t)$, i. e.:

$$X(t) = c_1 x_1(t) + c_2 X_2(t) = c_1 \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{t\ln t - t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures). Alternativament, utilitzant la matriu fonamental (54), també podem expressar la solució general com

$$X(t) = \Phi(t)c = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \\ -\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{t\ln t - t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{t\ln t - t} \\ -c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{t\ln t - t} \end{pmatrix},$$

per a $t > 0$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure). ▷

2. Resolució de sistemes d'EDOs lineals de primer ordre homogenis i a coeficients constants (breu recordatori). Sigui A una matriu real 2×2 i $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ els seus valors propis. Aleshores

(i) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Triem un vector $v_1 \in \mathrm{Nuc}(A - \lambda I_2)^2 \setminus \mathrm{Nuc}(A - \lambda I_2) = \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Nuc}(A - \lambda I_2)$ (en aquest cas) i agafem $v_2 = (A - \lambda I_2)v_1$, on $I_2 = \mathrm{diag}[1, 1]$ és la matriu unitat 2×2. Aleshores:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\left(v_1 + t v_2\right), \\ X_2(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t} v_2, \end{aligned} \tag{55}$$

formen un CFS del sistema homogeni $X' = AX$ (exercici: comproveu-ho!).

(ii) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$; distingim segons siguin reals o complexos conjugats:

(ii.1) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. En aquest (veure proposició 5 i proposició 6) si v_1, v_2 són els VEPs associats als VAPs λ_1 i λ_2 respectivament; llavors un CFS ve donat per:

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1, \qquad X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_2. \tag{56}$$

(ii.2) Si $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ i $\lambda_2 = \overline{\lambda}_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ són valors propis complexos conjugats, en aquest cas només cal calcular un vector propi complex de valor propi λ_1, que serà de la forma $v_1 = \mathrm{Re}(v_1) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(v_1)$, essent $\mathrm{Re}(v_1)$ i $\mathrm{Im}(v_1)$ la part real i imaginària de v_1, respectivament (per exemple $u = \mathrm{Re}(v_1)$, $w = \mathrm{Im}(v_1)$). Llavors les fórmules següents donen dues solucions *li* de $X' = AX$:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \mathrm{e}^t\left(\cos(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(v_1) - \sin(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(v_1)\right), \\ X_2(t) &= \mathrm{e}^t\left(\sin(\beta t) \cdot \mathrm{Re}(v_1) + \cos(\beta t) \cdot \mathrm{Im}(v_1)\right). \end{aligned} \tag{57}$$

Useu aquests resultats i el mètode de variació de les constants per trobar la solució general dels següents sistemes d'EDOs lineals no homogenis.

(a) $X' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix}$.

(d) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$. (Indicació: deriveu $t\cos(2t)$ i $t\sin(2t)$ i vegeu que les expressions us ajuden en el càlcul de les integrals).

◁ **Solució.** *(a)* El sistema és no homogeni amb terme independent $b(t) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Sabem que la solució general, $X(t)$, ve donada per la suma $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$, on $X_h(t)$ és la solució general del sistema homogeni associat, i. e.:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X \tag{58}$$

i $X_p(t)$ és una solució qualsevol, que anomenarem *solució particular*, del sistema no homogeni (veure proposició 7 més avall). A més, en aquest cas, la matriu del sistema (58) no depèn de t (i. e., els seus coeficients són constants), per tant, per calcular la solució general, $X_h(t)$, de (58), podem fer servir la proposició 6.

Els VAPs de la matriu A són les arrels del seu polinomi característic:

$$p_A(t) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1), \qquad \text{arrels: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

on, com la matriu A és 2×2, fem servir la fórmula (41) (fórmula "traça-determinant") que apareix a la remarca 12. Es comprova que $v_1 = (3,2)^\top$ i $v_2 = (1,1)^\top$ són VEPs associats als VAPs $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 0$ respectivament. En efecte:

- Per $\lambda_1 = 1$: $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_1 I_2) = \mathrm{Nuc}(A - I_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \langle (3,2)^\top \rangle$.

- Per $\lambda_2 = 0$: $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_2 I_2) = \mathrm{Nuc}(A - 0 I_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \langle (1,1)^\top \rangle$.

D'acord amb la proposició 6,

$$X_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definides per a tot $t \in \mathbb{R}$, formen un CFS del sistema (58). La matriu fonamental corresponent a aquestes solucions és:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$. Per calcular $X_p = X_p(t)$, la solució particular del sistema no homogeni, utilitzarem la proposició 7. Aplicant la fórmula de variació de les constants (11) al cas que ens ocupa; és a dir, amb la matriu fonamental $\Phi = \Phi(t)$ i amb el terme independent, $b = b(t)$, donats respectivament per:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

obtenim com solució particular,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \int \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2\mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 5\mathrm{e}^{-t} \\ -11 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5\mathrm{e}^{-t} \\ -11t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 - 11t \\ -10 - 11t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on, per invertir la matriu, es pot fer servir la fórmula de la remarca 6. Finalment, la solució general $X = X(t)$ s'obté afegint la solució general de l'homogènia $X_h(t) = \Phi(t)c$. Així:

$$X(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^t & 1 \\ 2\mathrm{e}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 - 11t \\ -10 - 11t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1\mathrm{e}^t + c_2 - 15 - 11t \\ 2c_1\mathrm{e}^t + c_2 - 10 - 11t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

(b) De nou el sistema és no homogeni, amb el corresponent sistema homogeni associat $X' = AX$ a coeficients constants i la matriu A donada per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Per calcular els seus VAPs, busquem les arrels del polinomi característic:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

i per tant: $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 2$. Per calcular els VEPs, fem:

- Per $\lambda_1 = 1$: $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_1 I_2) = \mathrm{Nuc}(A - I_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \langle (2,1)^\top \rangle \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ VEP.

- Per $\lambda_2 = 2$: $\mathrm{Nuc}(A - \lambda_2 I_2) = \mathrm{Nuc}(A - 2I_2) = \mathrm{Nuc}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,1)^\top \rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ VEP.

Aleshores, segons (56)

$$X_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

formen un CFS del sistema. A aquestes solucions li correspon la matriu fonamental següent:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

amb la qual podem trobar la solució particular $X_p = X_p(t)$ donada per la fórmula de variació de les constants (11):

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) b(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \Phi(t) \int \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} 2 \\ -3\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 3\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \\ 2t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalment, podem escriure la solució general del sistema no homogeni com

$$X(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \\ 2t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} + 4t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \\ c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (i. e., amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures).

(c) Tenim dos VAPs complexos conjugats: $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - \mathrm{i}$; amb VEPs respectius: $v_1 = (\mathrm{i}, -1)^\top$ i $v_2 = \overline{v}_1 = (-\mathrm{i}, 1)$. Aleshores, d'acord amb (57), tenim un CFS donat per:

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}; \qquad \text{i llavors: } \Phi(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental del sistema. Per trobar una solució particular, aplicarem la fórmula de variació dels paràmetres (11):

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \cos t & -\mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \sin t & \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \Phi(t) \int \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \sin t \\ \mathrm{e}^t \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(2t) \\ \frac{1}{2}\sin(2t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^t}{2} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I llavors, la solució general és:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \mathrm{e}^t \cos t - c_2 \mathrm{e}^t \sin t - \frac{1}{2} \mathrm{e}^t \cos t = \left(c_1 - \tfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^t \cos t - c_2 \mathrm{e}^t \sin t, \\ x_2(t) &= c_1 \mathrm{e}^t \sin t + c_2 \mathrm{e}^t \cos t + \frac{1}{2} \mathrm{e}^t \sin t = \left(c_1 - \tfrac{1}{2}\right) \mathrm{e}^t \sin t + c_2 \mathrm{e}^t \cos t + \mathrm{e}^t \sin t. \end{aligned}$$

Amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris. De fet, si escrivim $d_1 = c_1 - \frac{1}{2}$ i $d_2 = c_2$, la solució anterior la podem expressar com,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathrm{e}^t (d_1 \cos t - d_2 \sin t), \\ x_2(t) &= \mathrm{e}^t (d_1 \sin t + d_2 \cos t + \sin t); \end{aligned}$$

definida per tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

(d) Els VAPs de la matriu són $\lambda_1 = 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2\mathrm{i}$, amb els VEPs respectius $v_1 = (1, \mathrm{i})^\top$ i $v_2 = \overline{v}_1 = (1, -\mathrm{i})^\top$. Llavors $\mathrm{Re}(v_1) = (1, 0)^\top$, $\mathrm{Im}(v_1) = (0, 1)^\top$; i segons (57):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

és una matriu fonamental del sistema, definida per tot $t \in \mathbb{R}$. La solució particular la buscarem, a partir de $\Phi(t)$, fent servir la fórmula de variació de les constants (11). En aquest cas, resulta:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \Phi(t) \int \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} \cos(2t) - 2t\sin(2t) \\ \sin(2t) + 2t\cos(2t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\cos(2t) \\ t\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on, per trobar les primitives $\int t\sin(2t)\mathrm{d}t$ i $\int t\cos(2t)\mathrm{d}t$, hem derivat $t\cos(2t)$ i $t\sin(2t)$. En efecte:

$$\begin{aligned} (t\cos(2t))' = \cos(2t) - 2t\sin(2t) &\Longrightarrow \int t\sin(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{t}{2}\cos(2t), \\ (t\sin(2t))' = \sin(2t) + 2t\cos(2t) &\Longrightarrow \int t\cos(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{t}{2}\sin(2t). \end{aligned}$$

Finalment, la solució general s'escriu com la suma de la solució general del sistema homogeni $X_h(t) = \Phi(t)c$ i la solució particular trobada dalt És a dir:

$$x_1(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + t,$$
$$x_2(t) = -c_1\sin(2t) + c_1\cos(2t),$$

la qual està definida per tot $t \in \mathbb{R}$; amb $c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ constants arbitràries. ▷

3. Trobeu la solució general dels següents sistemes d'EDOs lineals no homogenis pel mètode de variació de les constants, tot comprovant prèviament que la matriu $\Phi(t)$ donada en cada cas és una matriu fonamental del corresponent sistema homogeni.

Resoleu també el problema de valors inicials $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) $X' = \dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$

(b) $X' = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$

(c) $X' = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{2t}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 1 \\ -1 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$

◁ **Solució.** *(a)* Comprovem primer que $\Phi(t)$ és una solució matricial del sistema homogeni associat. És a dir, que les seves columnes són solució de:

$$X' = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} X. \tag{61}$$

En efecte, ja que:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A(t)\Phi(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

i per tant $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, per a tot $t \in \mathbb{R}$. A més,

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{t}{1+t^2} & \dfrac{1}{1+t^2} \\ -\dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{t}{1+t^2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$, i llavors (per la proposició 2), les columnes de $\Phi(t)$ śon *li*. Aleshores $\Phi = \Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat (61).

Per trobar la solució particular del sistema no homogeni aplicarem la fórmula de variació de les constants (14) —remarca 5— amb $t_0 = 0$,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\ &= \Phi(t)\int_0^t \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{62}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$. Aleshores, la solució general del sistema no homogeni ve donada per:

$$X(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 t - c_2 + t^2 \\ c_1 + c_2 t + t \end{pmatrix},$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ arbitrari (lliure).

Per últim, la solució del PVI amb la *ci* $X(0) = (0,0)^\top$ l'obtenim aplicant (13) amb $t_0 = 0$ i $X_0 = (0,0)^\top$, i. e.:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \Phi(t)\int_0^t \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

i veiem que, en aquest cas, òbviament coincideix amb la solució particular (62) prèviament obtinguda (veure remarca 5).

(b) D'una banda tenim que:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad A(t)\Phi(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & -2\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

i per tant, $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Les columnes són doncs solució del sistema homogeni associat, i a més són *li* en $\mathbb{R}$, perquè

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & -1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$ (vegeu proposició 2). Aleshores $\Phi = \Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat $X' = A(t)X$.

D'altra banda, per trobar una solució particular del sistema no homogeni, $X_p = X_p(t)$, fem servir la fórmula de variació de les constants (14) (remarca 5) amb $t_0 = 0$. Fent els càlculs, obtenim:

$$X_p(t) = \Phi(t)\int_0^t \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s} & 1 \\ -1 & \mathrm{e}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2s} \\ \mathrm{e}^{-2s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-2s} \\ -\mathrm{e}^{2s} + \mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-2t}/2 - 1/2 \\ -\mathrm{e}^{2t}/2 - \mathrm{e}^{-t} + 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 3 \\ -3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-t} - 1 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Ara, podem escriure la solució general com la suma de la del sistema homogeni associat, $X_h(t) = \Phi(t)c$, $c \in \mathbb{R}^2$ arbitrari, i la solució particular $X_p(t)$ que tot just hem obtingut, i. e.:

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = \Phi(t)c + X_p(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 3 \\ -3\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{-t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t - c_2 + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^t + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{3}{4} \\ c_1 + c_2\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^t + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{4} \end{pmatrix},$$

per a $t \in \mathbb{R}$, $c = (c_1, c_2)^\top$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Finalment, per trobar la solució $X = X(t)$ que satisfà la *ci* $X(0) = (0,0)^\top$, aplicaríem la fórmula (13) amb $t_0 = 0$ i $X_0 = (0,0)^\top$. En aquest cas però, com a l'apartat *(a)*, es comprova d'immediat que coincideix amb la solució particular (63) trobada dalt, i. e.,

$$X(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3e^{2t} - e^t + e^{-t} - 3 \\ -3e^{-2t} + e^t + 3e^{-t} - 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Comprovem que $\Phi(t)$ és una solució matricial del sistema homogeni associat. Derivant d'una banda i substituint per l'altra s'obté:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{1+e^{2t}}\begin{pmatrix} e^{2t} & -e^t \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{1+e^{2t}}\begin{pmatrix} e^t(1+e^{2t}) & 0 \\ 0 & e^t(1+e^{2t}) \end{pmatrix}$$

i llavors $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$; és a dir, les columnes de $\Phi(t)$ són solució del sistema homogeni associat. A més,

$$\det \Phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} + 1 \neq 0$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$; per tant, en virtut de la proposició 2, les columnes de $\Phi(t)$ són *li* en $\mathbb{R}$ i llavors $\Phi(t)$ és una matriu fonamental del sistema homogeni associat.

A continuació calculem la solució particular donada per la fórmula (14), amb $t_0 = 0$; d'on resulta:

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} e^s & 1 \\ -1 & e^s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \Phi(t)\int_0^t \frac{1}{1+e^{2s}}\begin{pmatrix} e^s & -1 \\ 1 & e^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ e^s \end{pmatrix} ds = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ te^t \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{64}$$

$t \in \mathbb{R}$. La solució general es pot escriure doncs com la suma:

$$X(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)\,ds = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ -1 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ te^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2 + t \\ -c_1 + c_2e^t + te^t \end{pmatrix},$$

$t \in \mathbb{R}$. Per últim, és evident que la solució particular (64) satisfà la *ci* $X(0) = (0,0)^\top$, per tant és la solució (única) del PVI que es proposa a l'enunciat. ▷

5.3.2 EDOs lineals d'ordre n

4. Trobeu la solució general de les següents EDOs lineals no homogènies, sabent que en cada cas $y_1(t)$ és una solució de l'EDO homogènia associada. Useu el mètode de reducció de l'ordre per obtenir una segona solució independent i el mètode de variació de les constants per calcular una solució particular de l'EDO completa.

(a) $t^2y'' - ty' + y = 4t\ln t$, $y_1(t) = t$, $t > 0$.

(b) $ty'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = t^2 + t$, $y_1(t) = e^t$, $t > 0$. (Indicació: $\displaystyle\int\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{e^{-t}}{t}$).

(c) $ty'' + 2y' + ty = t$, $y_1(t) = \dfrac{\cos t}{t}$, $t > 0$. (Indicació: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \tan t$.)

(d) $t^2y'' + ty' + y = \dfrac{1}{\cos^3(\ln(t))}$, $y_1(t) = \cos(\ln(t))$, $t > 0$.

(e) $t^2y'' - 3ty' + 4y = t^3$, $y_1(t) = t^2$, $t > 0$.

◁ **Solució.** *(a)* Per a aquesta EDO: $a_0(t) = 1, a_1(t) = -t, a_2(t) = t^2$ i $f(t) = 4t\ln t$, mentre que $y_1(t) = t$ és una solució particular de l'EDO homogènia associada. En efecte, derivant tenim $y_1'(t) = 1, y_1''(t) = 0$ i substituint després a l'EDO es veu que

$$t^2y_1''(t) - ty_1'(t) + y_1(t) = -t + t = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$, en particular per a $t > 0$. Per obtenir una segona solució, $y_2 = y_2(t)$ *li* amb $y_1(t)$, apliquem (27),

$$y_2(t) = t\int \frac{1}{t^2}\exp\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = t\int \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\ln t}\,\mathrm{d}t = t\int \frac{t}{t^2}\,\mathrm{d}t = t\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = t\ln t,$$

per a $t > 0$. Sabem que la solució general de l'homogènia associada, $y_h = y_h(t)$, s'escriu com *cl* a coeficients constants (arbitraris) d'un CFS; per tant

$$y_h(t) = c_t t + c_2 t\ln t, \tag{65}$$

definida per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

En aquest apartat, el CFS és: $y_1(t) = t, y_2(t) = t\ln t, t > 0$. Llavors,

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t\ln t \\ 1 & \ln t + 1 \end{vmatrix} = t$$

és el Wronskià corresponent (notem que $W(t) = t \neq 0$ per a $t > 0$), mentre que $a_2(t) = t^2$ (com ja hem dit dalt) i el terme independent és $f(t) = 4t\ln t$. Aleshores tenim, segons (34):

$$u_1(t) = -4\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}(\ln t)^3, \qquad u_2(t) = 4\int \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = 2(\ln t)^2;$$

amb la qual cosa, la solució particular donada per la Fórmula de Variació de les Constants (35) és

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{4}{3}t(\ln t)^3 + 2t(\ln t)^3 = \frac{2}{3}t(\ln t)^3. \tag{66}$$

Finalment, la solució general de l'EDO completa la podem escriure com la solució general (65) de l'homogènia associada i la solució particular obtinguda (66) de l'EDO no homogènia. Això és:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t) = c_1t + c_2t\ln t + \frac{2}{3}(t\ln t)^3,$$

per a $t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

(b) Comparant coeficients amb (33) tenim que per l'EDO,

$$ty'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = t^2 + t, \tag{67}$$

és: $a_0(t) = t + 2$, $a_1(t) = -2(1+t)$, $a_2(t) = t$ ($\neq 0$, en particular per a $t > 0$) i $f(t) = t^2 + t$. Comprovem primer que $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ és una solució de l'homogènia associada:

$$ty_1''(t) - 2(1+t)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) = (t - 2(1+t) + t + 2)\mathrm{e}^t = (t - 2 - 2t + t + 2)\mathrm{e}^t = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. La segona solució *li* la trobem amb la fórmula (27) —veure també l'exemple 10:

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{e}^t \int \mathrm{e}^{-2t} \exp\left(\int \left(2 + \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{2t+\ln t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\mathrm{e}^t,$$

per a $t > 0$. Nota: com ja es va observar a l'exemple 10, si $y_1(t), y_2(t)$ són un CFS, també ho són $y_1(t), \alpha y_2(t)$, per a qualsevol $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Amb aquesta consideració present, agafarem com CFS de l'homogènia associada a l'EDO (67), les solucions

$$y_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t. \tag{68}$$

El seu Wronskià resulta:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^t & t^3\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & 3t^2\mathrm{e}^t + t^3\mathrm{e}^t \end{vmatrix} = 3t^2\mathrm{e}^{2t} \neq 0,$$

per a tot $t \neq 0$, en particular per a $t > 0$. La solució general, $y_h = y_h(t)$ de l'EDO homogènia associada és *cl* del CFS (68):

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \left(c_1\mathrm{e}^t + c_2 t^3\right)\mathrm{e}^t, \tag{69}$$

$t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Per trobar la solució particular de (67) donada pel mètode de variació de les constants, calculem primer $u_1(t), u_2(t)$ tal com resulten de (34). En aquest cas, integrant per parts:

$$u_1(t) = -\frac{1}{3}\int (t^2+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} u(t) = t^2+t \Rightarrow u'(t) = 2t+1, \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \Rightarrow v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(t^2+t)\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{3}\int (2t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} u(t) = 2t+1 \Rightarrow u'(t) = 2, \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \Rightarrow v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(t^2+t)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}(2t+1)\mathrm{e}^{-t} - \frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}(t^2+t+2t+1+2)\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{3}(t^2+3t+3)\mathrm{e}^{-t},$$
$$u_2(t) = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} u(t) = \mathrm{e}^{-t} \Rightarrow u'(t) = -\mathrm{e}^{-t}, \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\dfrac{1}{t} \end{array}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{3t} - \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-t}}{3t},$$

o a la segona suposem $t \neq 0$, per exemple $t > 0$. Així, la solució particular buscada (veure fórmula (35)) és:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \frac{1}{3}(t^2+3t+3) - \frac{1}{3}t^2 = t+1, \tag{70}$$

per a $t > 0$.

Remarca 13. Tot i que per poder aplicar la fórmula de reducció de l'ordre (27) i la fórmula de variació de les constants (35), hem suposat $t > 0$; tant les solucions (68) de l'homogènia com la solució particular (70) estan definides per a tot $t \in \mathbb{R}$, com es pot comprovar derivant i substituint a les EDOs corresponents (exercici!). A més $y_1(t) = \mathrm{e}^t$ i $y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t$ són *li* en $\mathbb{R}$ en el sentit següent: si busquem una *cl* d'aquestes funcions amb coeficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants, que sigui idènticament zero per a tot $t \in \mathbb{R}$; llavors necessàriament $c_1 = c_2 = 0$. Dit d'altra manera:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = 0 \text{ per a tot } t \in \mathbb{R}, \text{ amb } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants } \implies c_1 = c_2 = 0.$$

Exercici: comproveu que, efectivament, això és cert per les solucions de l'homogènia que hem calculat: $y_1(t) = \mathrm{e}^t$, $y_2(t) = t^3\mathrm{e}^t$; i aleshores (68) és un CFS de l'EDO homogènia per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Per concloure, la solució general de (67) l'escriurem com la suma de la solució general de l'homogènia (69) i la solució particular de l'EDO completa (70):

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1\mathrm{e}^t + c_2 t^3\mathrm{e}^t + t + 1,$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ (vegeu la remarca 13 dalt) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(c) Comparant coeficients amb (33), per l'EDO

$$ty'' + 2y' + ty = t, \tag{71}$$

tenim que $a_0(t) = t, a_1(t) = 2, a_2(t) = t$, per tant $a_2(t) \neq 0$ per a $t > 0$ i el terme independent és $f(t) = t$. Comprovem primer que $y_1(t) = \dfrac{\cos t}{t}$, $t > 0$, és solució de l'EDO homogènia associada a (71). En efecte, derivant

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -\frac{t\sin t + \cos t}{t^2}, \\ y_1''(t) &= \frac{t^2(-\sin t - t\cos t + \sin t) - 2t(-t\sin t - \cos t)}{t^4} = \frac{-t^3\cos t + 2t^2\sin t + 2t\cos t}{t^4} \end{aligned}$$

i després substituint en l'EDO, tenim:

$$\begin{aligned} ty_1''(t) + 2y_1'(t) + ty_1(t) &= \frac{1}{t^3}\left(2t^2\sin t - t^3\cos t + 2t\cos t\right) - \frac{2}{t^2}\left(t\sin t + \cos t\right) + \cos t \\ &= 2\frac{\sin t}{t} - \cos t + 2\frac{\cos t}{t^2} - 2\frac{\sin t}{t} - 2\frac{\cos t}{t^2} + \cos t = 0, \end{aligned}$$

per a tot $t > 0$. Si volem ara una segona solució de l'EDO homogènia associada,

$$ty'' + 2y' + ty = 0, \tag{72}$$

li amb $y_1(t)$; apliquem la fórmula de reducció de l'ordre (27):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t)\int \frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int\frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = \frac{\cos t}{t}\int \frac{1}{\frac{\cos^2 t}{t^2}}\exp\left(-\int\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos t}{t}\int\frac{t^2\mathrm{e}^{-\ln t^2}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{\cos t}{t}\int\frac{t^2}{\cos^2 t}\times\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{\cos t}{t}\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{\cos t}{t}\tan t = \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

Tenim així un CFS de l'EDO (72) donat per:

$$y_1(t) = \frac{\cos t}{t}, \qquad y_2(t) = \frac{\sin t}{t} \tag{73}$$

i definit per a $t > 0$. El seu Wronskià és:

$$\begin{aligned} W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \dfrac{\cos t}{t} & \dfrac{\sin t}{t} \\ \dfrac{-t\sin t - \cos t}{t^2} & \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\cos t}{t^3}(t\cos t - \sin t) + \frac{\sin t}{t^3}(t\sin t + \cos t) = \frac{1}{t^2}(\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{1}{t^2} \neq 0, \end{aligned}$$

per a $t > 0$. La solució general de L'EDO homogènia associada (72) és la *cl*:

$$y_h(t) = c_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t}, \tag{74}$$

per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris (lliures).

Per buscar la solució particular donada pel mètode de variació de les constants de l'EDO completa (71), calculem primer les funcions $u_1(t)$, $u_2(t)$ donades per les integrals (34) que, al igual que en l'apartat *(b)* també surten primitivitzant per parts:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = -\int t\sin t\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1, \\ v'(t) = -\sin t \Rightarrow v(t) = \cos t \end{array}\right\} = t\cos t - \int \cos t\,\mathrm{d}t$$

$$= t\cos t - \sin t,$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = \int t\cos t\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1, \\ v'(t) = \cos t \Rightarrow v(t) = \sin t \end{array}\right\} = t\sin t + \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= t\sin t - \cos t.$$

Ara, podem escriure la solució particular de l'EDO no homogènia formant la *cl* (35) amb el CFS (73) i les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ trobades dalt. És a dir:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = (t\cos t - \sin t)\frac{\cos t}{t} + (t\sin t - \cos t)\frac{\sin t}{t} = 1, \tag{75}$$

que és una solució constant, òbviament definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Finalment, la solució general de l'EDO no homogènia (71) s'obté com la suma de la solució (74) de l'homogènia associada i la solució particular de l'EDO completa (75), i. e.:

$$y(t) = c_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t} + 1,$$

per a $t > 0$, amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(d) En aquest cas, les funcions $a_0(t) = 1$, $a_1(t) = t$, $a_2(t) = t^2$ i el terme independent,

$$f(t) = \frac{1}{\cos^3(\ln t))}$$

estan definides i són continues en qualsevol interval de la forma

$$I_k = \left[\mathrm{e}^{-\pi/2+k\pi}, \mathrm{e}^{\pi/2+k\pi}\right], \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{76}$$

on a més $a_2(t) = t^2$ no s'anul·la. La funció $y_1(t) = \cos(\ln(t))$, $t > 0$, és solució de l'EDO homogènia. En efecte, derivant tenim:

$$y_1'(t) = -\frac{\sin(\ln t)}{t}, \qquad y_1''(t) = \frac{\sin(\ln t) - \cos(\ln t)}{t^2}$$

i substituint a continuació en l'EDO es comprova que:

$$t^2 y_1''(t) + t y_1'(t) + y_1(t) = \sin(\ln t) - \cos(\ln t) - \sin(\ln t) + \cos(\ln t) = 0,$$

per a tot $t > 0$. La fórmula de reducció de l'ordre (27) ens proporciona una segona solució *li* de l'EDO homogènia associada:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = \cos(\ln t) \int \frac{1}{\cos^2(\ln t)} \exp\left(-\int \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \cos(\ln t) \int \frac{\mathrm{d}t}{t\cos^2(\ln t)} = \cos(\ln t)\tan(\ln t) = \sin(\ln t), \end{aligned}$$

definida per a $t > 0$. Tenim doncs el CFS de l'EDO homogènia associada següent:

$$y_1(t) = \cos(\ln t), \qquad y_2(t) = \sin(\ln t) \tag{77}$$

amb la corresponent solució general:

$$y_h(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t), \tag{78}$$

per a $t > 0$.

Per obtenir la solució particular donada pel mètode de variació de les constants, calculem primer les integrals (34), on $W(t)$ és el Wronskià del CFS (77),

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\ln t) & \sin(\ln t) \\ -\dfrac{\sin(\ln t)}{t} & \dfrac{\cos(\ln t)}{t} \end{vmatrix} = \frac{\cos^2(\ln t)}{t} + \frac{\sin^2(\ln t)}{t} = \frac{1}{t} \neq 0$$

per a $t > 0$. Així:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{y_2(t) f(t)}{a_2(t) W(t)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\tan(\ln t)}{t\cos^2(\ln t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\tan^2(\ln t), \\ u_2(t) &= \int \frac{y_1(t) f(t)}{a_2(t) W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t\cos^2(\ln t)} = \tan(\ln t). \end{aligned}$$

La solució particular de l'EDO completa s'obté per la *cl* (35). Aleshores:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) \\ &= -\frac{1}{2}\tan^2(\ln t)\cos(\ln t) + \tan(\ln t)\sin(\ln t) = -\frac{\sin^2(\ln t)}{2\cos(\ln t)} + \frac{\sin^2(\ln t)}{\cos(\ln t)} = \frac{\sin^2(\ln t)}{2\cos(\ln t)} \end{aligned} \tag{79}$$

que està definida als intervals I_k amb $k \in \mathbb{Z}$ de la forma (76). La solució general de l'EDO no homogènia la donem com la suma de (78) —solució general de l'homogènia associada— i (79) —solució particular de l'EDO lineal completa:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_1 y_2(t) + y_p(t) = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t) + \frac{\sin^2(\ln t)}{2\cos(\ln t)},$$

definida per a $t \in I_k, k \in \mathbb{Z}$, on I_k són els els intervals (76) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitràries (lliures).

(e) Comparant coeficients amb (33), tenim per l'EDO lineal:

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = t^3, \tag{80}$$

$t > 0$, és:

$$a_0(t) = 4, \quad a_1(t) = -3t, \quad a_2(t) = t^2, \quad f(t) = t^2.$$

A més, $a_2(t) = t^2$ no s'anul·la per a $t > 0$. Abans de calcular una segona solució de l'homogènia associada a (80), i.e., de l'EDO:

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \tag{81}$$

$t > 0$, comprovem que en efecte, $y_1(t) = t^2$, és solució. En efecte, derivant: $y_1'(t) = 2t$, $y_1''(t) = 2$ i substituint després en (81)

$$t^2 y_1''(t) - 3t y_1'(t) + 4y_1(t) = 2t^2 - 3t \times 2t + 4t^2 = 2t^2 - 6t^2 + 4t^2 = 0,$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. A continuació, mitjançant la fórmula (27):

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(t)} \exp\left(-\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \\ &= t^2 \int \frac{1}{t^4} \exp\left(\int \frac{3}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t = t^2 \int \frac{\mathrm{e}^{\ln t^3}}{t^4}\,\mathrm{d}t = t^2 \int \frac{t^3}{t^4}\,\mathrm{d}t = t^2 \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = t^2 \ln t, \end{aligned}$$

$t > 0$, obtenim una segona solució *li* amb $y_1(t)$ i aleshores,

$$y_1(t) = t^2, \qquad y_2(t) = t^2 \ln t \tag{82}$$

formen un CFS de l'EDO homogènia associada (81). El seu Wronskià és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 \ln t \\ 2t & 2t \ln t + t \end{vmatrix} = t^3 \neq 0,$$

per a $t > 0$; i la solució general de l'EDO homogènia (81) ve donada per la *cl* del CFS (82), i. e.:

$$y_h(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t, \tag{83}$$

definida per a $t > 0$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per trobar una solució particular de l'EDO no homogènia (80) fem ús de la fórmula de variació de les constants, calculant primer les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ amb les fórmules (34), i. e.,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{y_2(t) f(t)}{a_2(t) W(t)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t^2 t^3 \ln t}{t^2 t^3}\,\mathrm{d}t = -\int \ln t\,\mathrm{d}t = -t \ln t + t, \\ u_2(t) &= \int \frac{y_1(t) f(t)}{a_2(t) W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^5}{t^2 t^3}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t \end{aligned}$$

i a continuació fem la *cl* (35) amb el CFS trobat (82), per obtenir:

$$y_p(t) = u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) = (-t \ln t + t) t^2 + t^3 \ln t = t^3, \tag{84}$$

definida, com es pot comprovar, per a tot $t \in \mathbb{R}$.

Ara, per tenir la solució general de l'EDO no homogènia, sumem la solució general (83) de l'EDO homogènia associada (81) i la solució particular (84) de l'EDO completa (80) que hem trobat dalt. Així:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t + t^3 = (t + c_1 + c_2 \ln t) t^2,$$

$t > 0$, i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures). ▷

5. Resolució d'EDOs lineals i homogènies de segon ordre i a coeficients constants (breu recordatori). Considerem l'EDO lineal $ay'' + by' + cy = 0$ on $a, b, c \in \mathbb{R}$ i denotem per $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ el seu *polinomi característic*. Si λ_1, λ_2 són les arrels de $P(\lambda)$, tenim:

(a) Si λ_1 i λ_2 són reals, tenim:

(a1) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, llavors $y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ i $y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ formen un Conjunt Fonamental de Solucions de l'EDO.

(a2) Si $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, llavors $y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ i $y_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}$ formen un Conjunt Fonamental de Solucions.

(b) Si $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ i $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ són arrels complexes conjugades, llavors $y_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ i $y_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$ formen un Conjunt Fonamental de Solucions.

Useu aquests resultats i la fórmula de variació de les constants per trobar la solució general de les següents EDOS lineals no homogènies.

(a) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$. (Indicació: La primitiva de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$ és immediata i la de $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$ també si expresseu la funció en termes de l'anterior).

(b) $y'' - y = \mathrm{e}^t \sin t$. (Indicació: $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t}(\cos t - 2\sin t)$.)

(c) $y'' + 2y' + y = t\mathrm{e}^t$.

(d) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\cos t}$, $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

◁ **Solució.** *(a)* En aquest cas, comparant amb (33) resulten els coeficients: $a_0(t) = 0, a_1(t) = a_2(t) = 1$ i el terme independent $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$. Així tenim que la corresponent EDO lineal homogènia és a coeficients constants i les arrels del seu polinomi característic són $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$. Llavors:

$$y_1(t) = 1, \qquad y_2(t) = -\mathrm{e}^{-t} \tag{85}$$

formen un CFS definit per a $t \in \mathbb{R}$. A aquest CFS li correspon el Wronskià,

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \neq 0$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$. La solució general de l'homogènia, $y_h = y_h(t)$ s'escriu doncs com *cl* del CFS:

$$y_h(t) = c_1 - c_1\mathrm{e}^{-t}, \tag{86}$$

definida per a $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per trobar la solució particular, calculem d'una banda les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ a partir de les fórmules (34). Explícitament:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t} = \int \frac{1+\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t = t - \ln(1+\mathrm{e}^t),$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+\mathrm{e}^t)$$

i la solució particular, $y_p = y_p(t)$, donada pel mètode de variació de les constants és *cl* d'aquestes funcions i el CFS (85). Això és:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = t - \ln(1+\mathrm{e}^t) - \mathrm{e}^{-t}\ln(1+\mathrm{e}^t) = t - (1+\mathrm{e}^{-t})\ln(1+\mathrm{e}^t). \tag{87}$$

La solució general de l'EDO lineal completa (no homogènia) ve donada per la suma:

$$y_p(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t) = c_1 - c_2\mathrm{e}^{-t} + t - (1+\mathrm{e}^{-t})\ln(1+\mathrm{e}^{t}),$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

(b) El polinomi característic de l'EDO homogènia és: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, d'on resulten les arrels $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. En conseqüència (punt (a1) del "recordatori" de l'enunciat),

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{-t}, \tag{88}$$

formen un CFS de l'EDO homogènia associada $y'' - y = 0$. Per trobar una solució particular de l'EDO no homogènia, aplicarem el mètode de variació de les constants per EDOs de segon ordre (corol·lari 2). Així tenim, d'una banda, que el Wronskià del CFS (88) de dalt és (com es comprova d'immediat): $W(t) = -2$. Aleshores, aplicant les fórmules (34), obtenim per a $u_1(t)$ i $u_2(t)$:

$$u_1(t) = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t}\sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t,$$
$$u_2(t) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2t}\sin t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{10}(\cos t - 2\sin t),$$

(s'omet la constant d'integració perquè, de fet, tan sols ens cal conèixer una primitiva qualsevol). Finalment, podem escriure la solució general de l'EDO no homogènia com:

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = (c_1 - \tfrac{2}{5}\cos t)\mathrm{e}^{t} + (c_2 - \tfrac{1}{5}\sin t)\mathrm{e}^{-t},$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

(c) El polinomi característic de l'EDO homogènia associada és: $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, que té una arrel doble $\lambda = -1$. Així, segons el punt (a2) del "recordatori" de l'enunciat,

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}, \qquad y_2(t) = t\mathrm{e}^{t},$$

formen un CFS de l'EDO homogènia $y'' + 2y' + y = 0$. El seu Wronskià és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & t\mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-2t} - t\mathrm{e}^{-2t} + t\mathrm{e}^{-2t}.$$

Aplicant les fórmules (34) del corol·lari 2, les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ resulten:

$$u_1(t) = -\int t^2\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3}, \qquad u_2(t) = \int t\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2},$$

(comproveu-ho!); i aleshores, la solució general de l'EDO no homogènia ve donada per

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) \\ &= c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2t\mathrm{e}^{-t} - \frac{t^3}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{t^3}{2}\mathrm{e}^{-t} = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2t\mathrm{e}^{-t} + \frac{t^3}{6}\mathrm{e}^{-t}, \end{aligned}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$, i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries.

(d) Tenim els coeficients: $a_0(t) = 5$, $a_1(t) = -4$, $a_2(t) = 1$ i el terme independent és: $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{\cos t}$. L'EDO homogènia associada és a coeficients constants. El seu polinomi característic és $p(t) = t^2 - 4t + 5$, el qual té dues arrels complexes conjugades: $\lambda_1 = 2 + 2\mathrm{i}$ i $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 2 - 2\mathrm{i}$. Així, segons el "resum" de l'enunciat (cas (b)),

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\sin t; \tag{89}$$

són un CFS de la corresponent EDO homogènia. El seu Wronskià és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t & \mathrm{e}^{2t}\sin t \\ 2\mathrm{e}^{2t}\cos t - \mathrm{e}^{2t}\sin t & 2\mathrm{e}^{2t}\sin t + \mathrm{e}^{2t}\cos t \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{4t}.$$

La solució general de l'EDO homogènia associada és *cl* del CFS (89) que hem trobat, i. e.,

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2\mathrm{e}^{2t}\sin t, \tag{90}$$

$t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (lliures).

Per tenir una solució particular de l'EDO no homogènia necessitem primer calcular les funcions $u_1(t)$ i $u_2(t)$ d'acord amb les fórmules (34) del mètode de variació de les constants (corol·lari 2). Fent els càlculs s'obté:

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{2t}\sin t}{\mathrm{e}^{4t}\cos t}\,\mathrm{d}t = \ln(\cos t),$$

$$u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{2t}\cos t}{\mathrm{e}^{4t}\cos t}\,\mathrm{d}t = t$$

i la solució particular resulta:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\ln(\cos t)\cos t + t\mathrm{e}^{2t}\sin t, \tag{91}$$

definida, per exemple, a l'interval: $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Aleshores, la solució general de l'EDO no homogènia és la suma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2\mathrm{e}^{2t}\sin t + \mathrm{e}^{2t}\ln(\cos t)\cos t + t\mathrm{e}^{2t}\sin t,$$

definida per a $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (de fet, en qualsevol interval de la forma $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$) i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries (paràmetres lliures). ▷

6. Considereu l'EDO lineal de segon ordre

$$(2t+3)ty'' + 2(2t^2-3)y' - 12(t+1)y = (2t+3)^2.$$

(a) Trobeu el valor de λ que fa que $y_1(t) = t^\lambda$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.

(b) Trobeu el valor de m que fa que $y_2(t) = \mathrm{e}^{mt}$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.

(c) Useu el mètode de variació de les constants per calcular una solució particular de l'EDO completa.

(d) Resoleu el problema de valors inicials $y(-1) = -1, y'(-1) = \frac{5}{2}$.

◁ **Solució.** *(a)* Busquem solucions de l'EDO homogènia de la forma $y_1(t) = t^\lambda$, ajustant $\lambda \in \mathbb{R}$ convenientment. Derivant primer tenim: $y_1'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$, $y_1''(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$; i substituint després en l'EDO es veu que:

$$\begin{aligned}
&(2t+3)ty_1''(t) + 2(2t^2-3)y_1'(t) - 12(t+1)y_1(t) \\
&\quad = (2t+3)\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-1} + 2(2t^2-3)\lambda t^{\lambda-1} - 12(t+1)t^\lambda \\
&\quad = 2\lambda(\lambda-1)t^\lambda + 3\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-1} + 4\lambda t^{\lambda+1} - 6\lambda t^{\lambda-1} - 12t^{\lambda+1} - 12t^\lambda \\
&\quad = (4\lambda-12)t^{\lambda+1} + (2\lambda(\lambda-1)-12)t^\lambda + (3\lambda(\lambda-1)-6\lambda)t^{\lambda-1} \\
&\quad = (4\lambda-12)t^{\lambda+1} + 2(\lambda+2)(\lambda-3)t^\lambda + 3\lambda(\lambda-3)t^{\lambda-1} = 0
\end{aligned}$$

per a tot $t > 0$ sii,

$$4\lambda - 12 = 0, \qquad (\lambda+2)(\lambda-3) = 0, \qquad \lambda(\lambda-3) = 0$$

simultàniament. La primera es verifica per $\lambda = 3$, la segona per $\lambda = -2$ i $\lambda = 3$ i la tercera per $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$; per tant l'únic valor de λ que satisfà totes tres equacions alhora és $\lambda = 3$. La solució per l'EDO lineal homogènia de la forma proposada és doncs

$$y_1(t) = t^3,$$

i està definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.

(b) Busquem ara solucions de la forma $y_2(t) = \mathrm{e}^{mt}$, ajustant $m \in \mathbb{R}$. Com a l'apartat anterior, es deriva i, en substituir a l'EDO homogènia es té que

$$\begin{aligned}(2t+3)ty_2''(t) + 2(2t^2-3)y_2'(t) - 12(t+1)y_2(t) &= \left[m^2(2t+3)t + 2m(2t^2-3) - 12(t+1)\right]\mathrm{e}^{mt}\\ &= (2m^2t^2 + 3m^2t + 4mt^2 - 6m - 12t - 12)\mathrm{e}^{mt}\\ &= \left[2m(m+2)t^2 + 3(m-2)(m+2)t - 6(m+2)\right]\mathrm{e}^{mt} = 0\end{aligned}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}$ sii les equacions,

$$m(m+2) = 0, \qquad (m-2)(m+2) = 0, \qquad m+2 = 0$$

es satisfan simultàniament; i això succeeix sii $m = -2$ (en efecte, la primera equació es satisfà per $m = 0$ i $m = -2$, la segona per $m = 2$ i $m = -2$ i la tercera, per $m = -2$). D'aquesta manera és clar que

$$y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t},$$

és una altra solució de l'EDO homogènia, definida per a $t \in \mathbb{R}$. A més $y_1(t) = t^3$ i $y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ són *li* en tot $\mathbb{R}$, en el sentit esmentat en la remarca 13, i. e.: l'única *cl* que satisfà $c_1t^3 + c_2\mathrm{e}^{-2t} = 0$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants és la *cl* trivial, i. e., la corresponent a $c_1 = c_2 = 0$ (exercici: comproveu-ho!). Tenim així que

$$y_1(t) = t^3, \qquad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \tag{92}$$

formen un CFS de l'EDO homogènia associada, definit per a tot $t \in \mathbb{R}$.

(c) El Wronskià del CFS (92) format per les solucions de l'EDO homogènia trobades als apartats *(a)* i *(b)* és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^3 & \mathrm{e}^{-2t}\\ 3t^2 & -2\mathrm{e}^{-2t}\end{vmatrix} = -2t^3\mathrm{e}^{-2t} - 3t^2\mathrm{e}^{-2t} = -t^2(2t+3)\mathrm{e}^{-2t}.$$

Per aplicar el mètode de variació de les constants, calculem les funcions $u_1(t)$, $u_2(t)$ donades per les fórmules (34), amb

$$a_2(t) = (2t+3)t, \qquad f(t) = (2t+3)^2$$

i el Wronskià donat dalt; llavors resulta,

$$\begin{aligned}u_1(t) &= -\int \frac{y_2(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{e}^{-2t}(2t+3)^2}{-t^3(2t+3)^2\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -\frac{1}{2t^2},\\ u_2(t) &= \int \frac{y_1(t)f(t)}{a_2(t)W(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3(2t+3)^2}{-t^3(2t+3)^2\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t = -\int \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.\end{aligned}$$

La solució particular, $y_p = y_p(t)$, s'obté ara de la *cl* d'aquestes funcions amb el CFS (92) de l'EDO homogènia segons (35). En el cas que ens ocupa, això dóna:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{1}{2t^2}t^3 - \frac{1}{2}e^{2t}e^{-2t} = -\frac{1}{2}(t+1). \tag{93}$$

Aleshores, la solució general de l'EDO no homogènia és la suma d'una *cl* del CFS (92) amb constants reals arbitràries, i una solució particular qualsevol de l'EDO no homogènia, com la que hem trobat pel mètode de variació de les constants (93), i. e.:

$$y(t) = c_1 t^3 + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}(t+1) \tag{94}$$

definida per a tot $t \in \mathbb{R}$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lliures.

(d) Per trobar la solució del PVI, imposem les *ci* a la solució general (93). S'obté llavors el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} y\,(-1) &= -c_1 + e^2 c_2 = -1, \\ y'(-1) &= 3c_1 - 2e^2 c_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & -e^2 \\ 3 & -2e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

el qual és compatible i determinat (el determinant és el Wronskià del CFS (92) en $t = -1$!). La seva solució ens permet fixar les constants c_1, c_2. Es comprova d'immediat que aquesta que és:

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 0$$

i així

$$y(t) = t^3 - \frac{1}{2}(t+1),$$

és la solució del PVI que correspon a les *ci* de l'enunciat. ▷

7. Considereu les funcions $y_1(t) = t$ i $y_2(t) = \dfrac{1}{t}$ per a $t > 0$.

a. Calculeu el Wronskià $W(t)$ i vegeu que $W(t) \neq 0$.

b. Trobeu l'EDO homogènia de la forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ que les té com a Conjunt Fonamental de Solucions.

◁ **Solució.** *(a)* El Wronskià de les funcions $y_1(t)$, $y_2(t)$ donades és:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t} = -\frac{2}{t},$$

el qual està definit per a tot $t \neq 0$ i és diferent de zero, en particular, per a $t > 0$.

(b) Imposant que $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1/t$ siguin solució d'aquesta EDO homogènia, obtenim el següent sistema lineal:

$$\left.\begin{aligned} y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) &= 0 + p(t) + q(t)t = 0, \\ y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) &= \frac{2}{t^3} - \frac{p(t)}{t^2} + \frac{q(t)}{t} = 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/t \end{pmatrix},$$

que han de satisfer $p(t)$, $q(t)$ per a tot $t > 0$. Resolent-ho —per exemple, per Cramer—, s'obté:

$$p(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t \\ 2/t & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2t} = \frac{1}{t}, \qquad q(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2/t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & -t \end{vmatrix}} = \frac{2/t}{-2t} = -\frac{1}{t^2}.$$

Aleshores, l'EDO que satisfan les funcions donades és:

$$y'' + \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2} = 0, \quad t > 0. \qquad \triangleright$$