Càlcul 2 **Avaluació continuada**
Grup 40 **25 de març de 2014**

Nom i Cognoms: ______________________________

1. Siguin $f(x,y) = (x^2 + \cos y,\ e^{x+y^2})$ i $g(u,v) = (u - v,\ u)$.
   (a) Doneu una fórmula explícita per $f \circ g$.
   (b) Proveu que f és localment invertible en $(x,y) = (0,1)$ i calculeu $Df^{-1}(\cos(1), e)$.

Resposta:

(a) $(f \circ g)(u,v) = f(u - v, u) = \Big((u-v)^2 + \cos u,\ e^{u-v+u^2}\Big)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f \in C^r(\mathbb{R}^2)$ amb $r \geq 1$ (de fet, en aquest cas, $r = \infty$): la 1a funció component, $f_1(x,y) = x^2 + \cos y$, és suma d'un polinomi i una funció elemental i la 2a funció component, $f_2(x,y) = e^{x+y^2}$, és l'exponencial d'un polinomi.

D'altra banda,

$$D_1 f_1(0,1) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + \cos(1)\right)\Big|_{x=0} = 0, \qquad D_2 f_1(0,1) = \frac{d}{dy}(\cos y)\Big|_{y=1} = -\sin(1),$$

$$D_1 f_2(0,1) = \frac{d}{dx}\left(e^{x+1}\right)\Big|_{x=0} = e, \qquad D_2 f_2(0,1) = \frac{d}{dy}\left(e^{y^2}\right)\Big|_{y=1} = 2e.$$

D'on:

$$Df(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(1) \\ e & 2e \end{pmatrix}$$

que és una matriu no singular: $\det Df(0,1) = e\sin(1) \neq 0$. Aleshores, pel *Teorema de la funció inversa*, existeixen dos oberts $W, U \subseteq \mathbb{R}^2$, amb $(0,1) \in W$, $f(0,1) = (\cos(1), e) \in U$, tals que:

(1) f estableix una bijecció de W en U, i. e.: $f|_W : W \longrightarrow U$ és una bijecció: per tot punt $(u,v) \in U$, existeix un *únic* $(x,y) \in W$ amb $(u,v) = f(x,y)$.
(2) La *inversa local*, $f^{-1} : U \longrightarrow W$, és $C^r(U)$ ($r = \infty$ en aquest cas).
(3) Sigui $(u,v) \in U$ i $(x,y) \in W$ amb $f(x,y) = (u,v)$. Llavors:

$$Df^{-1}(u,v) = (Df(x,y))^{-1}. \tag{1}$$

Remarca. De fet, (1) es segueix d'immediat derivant la identitat $f^{-1} \circ f = Id$ mitjançant la regla de la cadena:

$$D(f^{-1} \circ f)(x,y) = Df^{-1}(f(x,y))Df(x,y) = Df^{-1}(u,v)Df(x,y) = Id,$$

d'on:

$$Df^{-1}(u,v) = Df(x,y)^{-1}.$$

Aplicant (1) tenint en compte que $f(0,1) = (\cos(1), e)$, resulta:

$$Df^{-1}(\cos(1), e) = (Df(0,1))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(1) \\ e & 2e \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sin(1)} & \frac{1}{e} \\ -\frac{1}{\sin(1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Donades les equacions,

$$\mathrm{e}^x \sin u - \mathrm{e}^y \cos v + w = 0,$$
$$x \cos w - u \sin y - v^2 = \cos(1).$$

(a) Demostreu que en un entorn de $(x, y, u, v, w) = (1, 0, 0, 0, 1)$ defineixen x, y com funcions implícites de (u, v, w). (2 punts)

(b) Sigui f aquesta funció. Calculeu $Df(0, 0, 1)$. (2 punts)

(c) Sigui $g(x, y) = x^3y - x + 1$. Calculeu el polinomi de Taylor de primer grau de $g \circ f$ en $(0, 0, 1)$. (1 punt)

Resposta:

(a) Sigui $F : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, u, v, w) \in \mathbb{R}^5 \to F(x, y, u, v, w) \in \mathbb{R}^2$ amb les seves components F_1, F_2 definides per:

$$F_1(x, y, u, v, w) = \mathrm{e}^x \sin u - \mathrm{e}^y \cos v + w,$$
$$F_2(x, y, u, v, w) = x \cos w - u \sin y - v^2 - \cos(1).$$

Llavors les equacions de l'enunciat s'expressen com,

$$F_1(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad F_2(x, y, z, u, v, w) = 0$$

Comprovarem les hipòtesis del *Teorema de la funció implícita* al punt $(x, y, u, v, w) = (1, 0, 0, 0, 1)$:

(1) $F(1, 0, 0, 0, 1) = (\mathrm{e} \sin(0) - \mathrm{e}^0 \cos(0) + 1, 1 \cos(1) - 0 \sin(0) - 0^2 - \cos(1)) = (0, 0)$.

(2) $F \in C^r(\mathbb{R}^5)$, amb $r \geq 1$ ($r = \infty$ en aquest cas): les components F_1, F_2 de F són sumes i productes de funcions elementals (sin, cos, exponencials, polinomis, etc.)

(3) Si calculem la matriu de derivades de $F = (F_1, F_2)$ respecte de les variables (x, y).

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}(1, 0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} D_1F_1(1, 0, 0, 0, 1) & D_2F_1(1, 0, 0, 0, 1) \\ D_1F_2(1, 0, 0, 0, 1) & D_2F_2(1, 0, 0, 0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \cos(1) & 0 \end{pmatrix},$$

tenim, $\det \dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}(1, 0, 0, 0, 1) \neq 0$.

Remarca. Donada una funció h definida en un obert A de $\mathbb{R}^n$ i amb valors en $\mathbb{R}^m$ (i. e., depenent de n variables i amb m funcions components), siguin $i_1, i_2, \ldots, i_s, s \in \mathbb{N}$, amb $s \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq n$; i $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \in A$. Denotem:

$$\frac{\partial(h_1, h_2, \ldots, h_m)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})}(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} D_{i_1}h_1(x^{(0)}) & D_{i_2}h_1(x^{(0)}) & \cdots & D_{i_s}h_1(x^{(0)}) \\ D_{i_1}h_2(x^{(0)}) & D_{i_2}h_2(x^{(0)}) & \cdots & D_{i_s}h_2(x^{(0)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{i_1}h_m(x^{(0)}) & D_{i_2}h_m(x^{(0)}) & \cdots & D_{i_s}h_m(x^{(0)}) \end{pmatrix},$$

i. e., la matriu de derivades parcials de la funció h, calculades al punt $x^{(0)} \in A$ respecte de les variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$. Notem que correspon a la submatriu formada per les columnes $i_1, i_2, \ldots, i_s$ de la matriu jacobiana de h al mateix punt.

Aleshores, existeixen un obert $\Omega \in \mathbb{R}^3$, amb $(0,0,1) \in \Omega$ i una funció

$$f = (f_1, f_2) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

tals que:

(1') $f \in C^r(\Omega)$.

(2') $f(0,0,1) = (f_1(0,0,1), f_2(0,0,1)) = (1,0)$.

(3') Per tot $(u,v,w) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} F_1(f_1(u,v,w), f_2(u,v,w), u, v, w) = 0, \\ F_2(f_1(u,v,w), f_2(u,v,w), u, v, w) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

De fet, en un cert obert $U \in \mathbb{R}^5$ amb $(1,0,0,0,1) \in U$, aquesta funció *implícita*, f, és única si s'exigeix, a més, que $(f(u,v,w), u, v, w) \in U$, i. e.:

$$F(x,y,u,v,w) = 0, \text{ amb } (x,y,u,v,w) \in U \iff (x,y) = f(u,v,w) \text{ amb } (u,v,w) \in \Omega.$$

(b) D'altra banda, derivant implicitament les equacions (2) respecte u, v, w, s'obté:

$$Df(u,v,w) \;=\; -\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(f(u,v,w),u,v,w)\right)^{-1} \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v,w)}(f(u,v,w),u,v,w),$$

per tot $(u,v,w) \in \Omega$. Si ara avaluem aquesta última expressió a $(u,v,w) = (0,0,1)$ tenint en compte el punt (2') de dalt, resulta:

$$\begin{aligned} Df(1,0,0) &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \cos(1) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sin(1) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\cos(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\sin(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tan(1) \\ \mathrm{e} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Aplicant la regla de la cadena podem calcular la derivada de la composició de f amb g al punt $(u,v,w) = (0,0,1)$,

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(0,0,1) &= Dg(f(0,0,1))Df(0,0,1) = Dg(1,0)Df(0,0,1) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tan(1) \\ \mathrm{e} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 & 1 - \tan(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i llavors, en aquest mateix punt, s'obté per $g \circ f$ el següent desenvolupament de Taylor:

$$(g \circ f)(u,v,w) = \mathrm{e}u + (1 - \tan(1))(w-1) + R_1(u, v, w-1),$$

per $(u,v,w) \in \Omega$.