Problema 3A.4. La transformació que descompon en monofàsics un operador d'inductàncies és:

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix},$$

essent $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Calculeu F^4.

◁ **Solució.** Calculem primer F^2:

$$F^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 & 1+\alpha^3+\alpha^3 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^3+\alpha^3 & 1+\alpha^2+\alpha^4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Si ara es té en compte que, segons l'enunciat: $\alpha^3 = 1$, es veu per una banda que:

$$1+\alpha^3+\alpha^3 = 3, \quad \text{i per l'altra: } 1+\alpha^2+\alpha^4 = 1+\alpha+\alpha^2,$$

ja que: $\alpha^4 = \alpha^3\alpha = \alpha$.

A continuació ve el "truquet" (i.e., the trick). Comproveu que:

$$\alpha^3 - 1 = (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2). \tag{2}$$

...Surt? Fantàstic! A partir d'aquí, només cal adonar-se de que, essent $\alpha^3 = 1$ i $\alpha \neq 1$, (2) implica necessàriament que

$$1+\alpha+\alpha^2 = 0.$$

Oi que sí? Bé, recapitulem. Tenim: $1+\alpha^3+\alpha^3 = 3$ i $1+\alpha^2+\alpha^4 = 1+\alpha+\alpha^2 = 0$. Si substituïm això a l'expressió de F^2 a (1), arribem a:

$$F^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

i finalment,

$$F^4 = F^2F^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

on denotem $I_3 = \mathrm{diag}[1,1,1]$, la matriu unitat 3×3. ▷

Remarca 1. De fet, es pot demostrar, per exemple per inducció (exercici!) que:

$$1 - \alpha^n = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}), \tag{3}$$

per tot $n \in \mathbb{N}$ i per $\alpha \in \mathbb{C}$ qualsevol (òbviament (2) correspondria a $n = 3$).

Suggeriment: Armats amb (3), ataqueu el problema **1.10** (i.e., el problema 10 del Tema 1: *Nombres complexos*). en particular, proveu que "la suma de les n arrels n-èsimes d'un número complex sempre dóna zero" i interpreteu geomètricament aquest resultat.