

Final Exam

Discrete Mathematics II, Winter 2013-2014

Problem 1 (2 points):

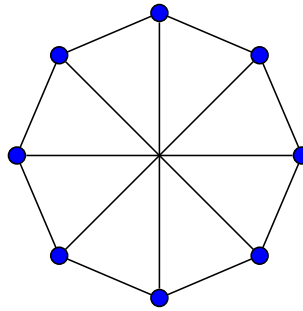
- a.- Define the Ramsey number $R(k, \ell)$ (0.5 points).
- b.- Prove that if $k, \ell \geq 1$, then $R(k + 1, \ell + 1) \leq R(k, \ell + 1) + R(k + 1, \ell)$. Conclude that $R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ (1.5 points).

Problem 2 (2 points):

- a.- Prove that for every graph G , $\chi(G) \geq \omega(G)$ and $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ (1 point).
- b.- Prove König's theorem for edge colorings: if G is a bipartite graph, then $\chi'(G) = \Delta(G)$ (1 point).

Problem 3 (2 points): Let $k \geq 1$ and let \mathcal{A} be a subset of $\binom{[n]}{k}$, such that $|\mathcal{A}| < s^{k-1}$. Prove that there is a coloring of $[n]$ using s colors so that no element in \mathcal{A} is monochromatic.

Problem 4 (2 points): The Wagner graph W_8 is the following graph with 8 vertices



Show that the Wagner graph is not planar (1 point) and that its chromatic number is equal to 3 (1 point).

Problem 5 (2 points): Let $G = (V, E)$ be a graph on n vertices. Denote by $t(G)$ for the number of triangles of G . For an edge $e \in E$, write $t(e)$ the number of triangles it belongs to.

- a.- Show that if the end-vertices of e are x and y , then $d(x) + d(y) - t(e) \leq n$, and $\sum_{e=\overline{xy} \in E} (d(x) + d(y)) - \sum_{e \in E} t(e) \leq n|E|$ (0.5 points).

- b.- Conclude that

$$t(G) \geq \frac{|E|}{3n}(4|E| - n^2).$$

(Hint: use the same arguments as in the proof of Mantel's theorem given in the lectures, based on an application of Cauchy - Schwarz inequality) (1 point).

- c.- Show that the previous relation implies that a graph on n vertices, n even, and $\frac{n^2}{4} + 1$ edges contains at least a linear number of triangles (0.5 points).

-
- You should try to write and justify ALL steps.
 - The preliminary grading of the subject will be available the 26th February (afternoon) both in the webpage and in my office.
 - You can come to my office on Friday 28th February from 09:00 to 12:00 to see the exam.

Klausur

Discrete Mathematics II, Winter 2013-2014

Aufgabe 1 (2 Punkte):

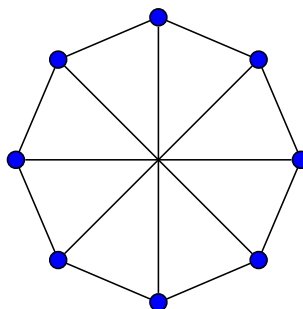
- Definieren Sie die Ramsey-Zahl $R(k, \ell)$ (0.5 Punkte).
- Zeigen Sie $R(k+1, \ell+1) \leq R(k, \ell+1) + R(k+1, \ell)$ für alle $k, \ell \geq 1$. Folgern Sie $R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ (1.5 Punkte).

Aufgabe 2 (2 Punkte):

- Zeigen Sie, dass $\chi(G) \geq \omega(G)$ und $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ für jeden Graphen G gilt (1 Punkt).
- Beweisen Sie König's Theorem für Kantenfärbungen: Wenn G bipartit ist, so gilt $\chi'(G) = \Delta(G)$ (1 Punkt).

Aufgabe 3 (2 Punkte): Sei $k \geq 1$ and sei \mathcal{A} eine Teilmenge von $\binom{[n]}{k}$ mit $|\mathcal{A}| < s^{k-1}$. Zeigen Sie, dass es eine Färbung von $[n]$ mit s Farben gibt, sodass kein Element von \mathcal{A} monochromatisch ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte): Der Wagner-Graph W_8 ist der folgende Graph mit 8 Ecken.



Beweisen Sie, dass der Wagner-Graph nicht planar ist (1 Punkt), und zeigen Sie, dass seine chromatische Zahl gleich 3 ist (1 Punkt).

Aufgabe 5 (2 Punkte): Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Ecken. Mit $t(G)$ bezeichne man die Anzahl der Dreiecke in G . Für eine Kante $e \in E$ schreibe man $t(e)$ für die Anzahl der Dreiecke, zu denen e gehört.

- Zeigen Sie, dass für eine Kante e mit Enden x und y stets $d(x) + d(y) - t(e) \leq n$ gilt. Zeigen Sie außerdem $\sum_{e=\overline{xy} \in E} (d(x) + d(y)) - \sum_{e \in E} t(e) \leq n|E|$ (0.5 Punkte).
- Folgern Sie

$$t(G) \geq \frac{|E|}{3n}(4|E| - n^2).$$

(*Hinweis:* Nutzen Sie dasselbe Argument wie im Beweis von Mantel's Theorem aus der Vorlesung, das auf einer Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung basiert.) (1 Punkt)

- Zeigen Sie für gerades n mit Hilfe der vorangehenden Relation, dass ein Graph mit n Ecken und $\frac{n^2}{4} + 1$ Kanten eine lineare Anzahl von Dreiecken enthält (0.5 Punkte).

-
- Sie sollten versuchen, JEDEN Schritt aufzuschreiben und zu begründen.
 - Das vorläufige Ergebnis wird am 26. Februar (Nachmittag) im Internet und in meinem Büro einzusehen sein.
 - Am Freitag, den 28. Februar, können Sie von 09:00 bis 12:00 in mein Büro zur Klausureinsicht kommen.