Make-Up Exam

Discrete Mathematics II, Winter 2013-2014

Problem 1 (2 points):

a.- Define the Van der Waerden's number $W(r, k)$ (0.5 point).

b.- Prove that $W(2, k) \geq 2^{k/2}$ (1.5 point).

Problem 2 (2 points):

a.- State Dirac's Theorem for the existence of a Hamiltonian cycle in a graph G in terms of the minimum degree $\delta(G)$ (0.5 points).

b.- Prove the previous result (1.5 points).

Problem 3 (2 points): Let G be a bridgeless connected planar graph. Prove that G has a 4-flow. (Hint: Use the 4-colour Theorem + duality of planar graphs in order to build a flow on the graph.)

Problem 4 (2 points): Show that a 3-regular graph G cannot be decomposed into edge-disjoint paths with at least 5 vertices.

Problem 5 (2 points): A graph G is *k-critical* if $\chi(G) = k$, but $\chi(H) < k$ for every proper subgraph H of G.

a.- Let G be a k-critical graph. Prove that for every $v \in V(G)$, there is a proper coloring of G using k colors such that the color in v appears NOwhere else, and the rest of the $k-1$ colors are ALL used to color the neighbours of v (1 point).

b.- Assume that G has a vertex of degree at most $k-2$. Then G cannot be k-critical. Conclude that if G is k-critical, then $\delta(G) \geq k-1$ (1 point).

- You should try to write and justify ALL steps.
- The preliminary grading of the subject will be available the 28th March both in the webpage and in my office.
- You can come to my office from 10:00 to 12:00 on 31 March to see the exam.

Klausur

Discrete Mathematics II, Winter 2013-2014

Aufgabe 1 (2 Punkte):

a.- Definieren Sie die Van-der-Waerden-Zahl $W(r, k)$ (0.5 Punkte).

b.- Beweisen Sie $W(2, k) \geq 2^{k/2}$ (1.5 Punkte).

Aufgabe 2 (2 Punkte):

a.- Geben Sie den Satz von Dirac an über die Existenz Hamiltonscher Kreise in einem Graphen G in Bezug auf dessen Minimalgrad $\delta(G)$ (0.5 Punkte).

b.- Beweisen Sie dieses Resultat (1.5 Punkte).

Aufgabe 3 (2 Punkte): Sei G ein brückenloser, zusammenhängender, planarer Graph. Zeigen Sie, dass G einen 4-Fluss hat. (Tipp: Nutzen Sie den Vier-Farben-Satz und die Dualität planarer Graphen, um einen Fluss auf dem Graphen zu konstruieren.)

Aufgabe 4 (2 Punkte): Zeigen Sie, dass ein 3-regulärer Graph G nicht in kantendisjunkte Wege mit mindestens 5 Ecken zerlegt werden kann.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Ein Graph G heißt *k-kritisch*, falls $\chi(G) = k$ gilt, aber $\chi(H) < k$ für jeden echten Untergraphen H von G.

a.- Sei G ein k-kritischer Graph. Zeigen Sie, dass es für jede Ecke $v \in V(G)$ eine zulässige Färbung von G mit k Farben gibt, sodass die Farbe von v bei keiner anderen Ecke auftaucht und alle übrigen $k-1$ Farben zur Färbung der Nachbarn von v verwendet werden (1 Punkt).

b.- Nehmen Sie an, dass G eine Ecke mit Grad höchstens $k-2$ besitzt. Zeigen Sie, dass G dann nicht k-kritisch sein kann. Folgern Sie, dass für einen k-kritischen Graphen stets $\delta(G) \geq k-1$ gilt (1 Punkt).

- Sie sollten versuchen, JEDEN Schritt aufzuschreiben und zu begründen.
- Das vorläufige Ergebnis wird am 28. März im Internet und in meinem Büro einzusehen sein.
- Am 31. März können Sie zwischen 10:00 und 12:00 zur Klausureinsicht in mein Büro kommen.