Anàlisi Real – dietari de pandèmia
Capítol 3: Sèries de Fourier
Notes del curs d'Anàlisi Real confeccionades per Juanjo Rué

Lliçó 1: Introducció

En aquest capítol desenvoluparem les primeres tècniques d'anàlisi harmònica del grau tot desenvolupant la teoria de les sèries de Fourier per a funcions suaus (ja veurem què volem dir per suau més endavant). Però, abans d'això, dedicarem una estona a "motivar" una nova norma sobre $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, que com veurem no tindrà res a veure amb la norma del suprem que hem estat treballant fins ara (farem precís més endavant en aquesta lliçó que volem dir per "res a veure").

Per a motivar el que farem, tot el que direm ara és en relació a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, tot i que ho podriem fer de fet en les funcions integrables Riemann. Sobre aquest espai de funcions (ja sabem que és un àlgebra) tenim una operació extra que és la integració de Riemann (sempre està definida). I això motiva la definició del següent operador:

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot): & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \int_a^b f(x)g(x)\,dx \end{array}$$

Usarem indistintament $(\cdot,\cdot)$ o $\langle\cdot,\cdot\rangle$ per denotar aquest operador. La primera observació fonamental és que aquest operador sempre està definit, és bilineal, simètric i $(f,f)\geq 0$ amb $(f,f)=0$ si i només si $f=0$ en l'interval $[a,b]$. Així doncs, ens defineix un producte escalar en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, i per tant defineix una norma (que denotarem per $\|\cdot\|_2$) i una distància (que denotarem per $d_2(\cdot,\cdot)$) definides segons

$$\|f\|_2=(f,f)^{1/2},\ d_2(f,g)=\|f-g\|_2.$$

Reiterem que aquestes definicions es poden aplicar quan l'espai de funcions que prenem són les integrables Riemann, però pel fil argumental que estem desenvolupant és important tenir en ment que estem interessats en les contínues. Per tant, la pregunta natural que ens podem formular ara és: com es relaciona aquesta norma amb la norma del suprem, de la que ja tenim molt de coneixement en les funcions contínues? Veurem que tot el que voldriem que funcionés en el nostre context no funcionarà. Per a no confondre normes, escriurem la norma del suprem d'aquí en endavant per $\|\cdot\|_{\sup}$.

Remarca 1. La primera observació important és que la norma del suprem i aquesta nova norma no són equivalents. Aquesta és una observació important perquè en espais vectorials de dimensió finita totes les normes són equivalents (ja que, essencialment només ens cal donar les relacions de fitació entre els elements de la base, que és un conjunt finit), mentre que en espais vectorials de dimensió no finita (com és el cas) això no serà així.

Veguem-ho amb un exemple. Si les dues normes són equivalents, aleshores existeix una constant universal C per la que es compliria que per tota funció $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|f\|_{\sup}\leq C\|f\|_2$ (la fita inferior també s'ha de complir, però ja veurem que aquesta condició ja no es compleix i per tant no cal fer res més).

Per a veure-ho, el que farem serà trobar una successió de funcions que tindran una norma del suprem arbitrariament gran, mentre que tindran una norma 2 constant. Això ho podem fer de la següent forma: construim una successió de funcions $f_n(x)$, contínues en $[a,b]$, tals que sempre $\int_a^b f_n(x)^2\,dx=1$, però que a mesura que avança la n, es concentrin cada cop més en el punt mig de l'interval. Això és pot fer amb una funció triangle, per exemple.

Aleshores és clar que podem fer $\|f_n\|_{\sup}$ tan gran com vulguem, mentre que $\|f_n\|_2=1$ sempre. Així doncs, no pot existir tal C, ja que per aquesta família ja no és compleix.

En certa manera, la norma 2 (li direm així per abreujar) és més grollera que la norma del suprem, ja que quan integrem estem perdent molta informació de la nostra funció. De fet, en la següent remarca veurem que si bé hem vist al Capítol 1 (i al 2) que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ junt amb la norma del suprem és un espai complet, això no és cert si canviem la norma per la norma 2.

Remarca 2. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ junt amb la norma $\|\cdot\|_2$ no és complet. Ho veurem de nou amb un contraexemple: prendrem una successió de Cauchy (respecte a la norma 2) que convergirà cap a una funció no contínua.

Prenem la família habitual: $[a,b]=[0,1]$ i $f_n(x)=x^n$ (recordeu el que ja sabem: aquesta família convergeix cap a una funció NO contínua, i per tant la convergència NO pot ser uniforme...cosa que ens diu que la successió $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no és de Cauchy quan mesurem respecte a la norma del suprem).

Si ara fem el càlcul, el que tenim és (fem el càlcul de la norma 2 al quadrat, per a no mirar les arrels quadrades):

$$\|f_n-f_m\|_2^2=(x^n-x^m,x^n-x^m)=\int_0^1(x^n-x^m)^2\,dx=\cdots=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2m+1}-\frac{2}{n+m+1}$$

i això pot escriure's com

$$2\frac{(n-m)^2}{(2n+1)(2m+1)(n+m+1)}.$$

Evidentment, els tres termes que ens surten els podem fer arbitrariament petits, i per tant, per tot $\varepsilon>0$ podem trobar un n_0 tal que si $n,m\geq n_0$ tindrem que $\|f_n-f_m\|_2^2<\varepsilon^2$.

Així doncs, de cara a càlcul de límits de successions, la norma 2 no funciona prou bé si ens restringuim a les funcions contínues (sortim fora del conjunt) De fet, el que veurem en el Capítol 4 (entre altres coses) és la resposta a la següent pregunta:

En quin espai de funcions $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\subset\mathcal{X}$ podrem assegurar que $(\mathcal{X},\|\cdot\|_2)$ serà un espai complet?

Avancem que aquest espai de funcions NO serà l'espai de funcions contínues a trossos, ni tampoc les funcions integrables Riemann. Una de les feines que haurem de fer per a respondre aquesta pregunta serà la d'extendre la noció d'integral (de Riemann) a funcions més complicades (no integrables Riemann). De fet, això serà la tasca principal del tema 4 d'aquest curs: *construir un espai de funcions que funcioni bé (en quant a completessa) amb la norma 2 per tal de poder fer anàlisi en contextos més generals que el de les funcions contínues* (serà especialment important això quan estudiem anàlisi funcional i/o EDPs).

Tornem però a la comparació que estem fent entre les dues normes, la del suprem i la norma 2. Ja hem vist que no són normes equivalents. Veguem ara que, de fet, la norma del suprem no prové d'un producte escalar.

Remarca 3. La norma del suprem no prové d'una norma. Per a fer-ho, només cal veure que la norma del suprem no compleix la llei del paralelogram, que ens diu que per tota parella de funcions f,g es compleix que

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2$$

(recordeu que tota norma procedent d'un producte escalar l'ha de complir). Basta, doncs, trobar dues funcions que no ho compleixin. Prenem, com és habitual, funcions de la forma x^n i x^m, amb $n\leq m$, en l'interval $[0,1]$. Aleshores és clar que $\|f+g\|_{\sup}=2$ (s'assoleix el suprem en $x=1$), i que $\|f\|_{\sup}=\|g\|_{\sup}=1$ (el mateix, el suprem s'assoleix en en $x=1$). Ara bé, quan calculem la norma de la diferència, tenim que

$$\|f+g\|_{\sup}^2-2\left(\|f\|_{\sup}^2+\|g\|_{\sup}^2\right)=4-2-2=0,$$

però $\|f-g\|_{\sup}^2\neq 0$ perquè de fet x^n-x^m té un màxim diferent de 0 en l'interval $[0,1]$.

Després de totes aquestes coses negatives, veurem almenhys una cosa positiva: la convergència uniforme implica la convergència si mesurem en termes de la norma 2. Anem a ficar un nom a tot això:

Definició 1 (Convergència quadràtica)**.** Sigui $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successió de funcions en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Direm que aquesta successió convergeix en mitjana d'ordre 2 (o mitjana quadràtica) cap a f si per tot $\varepsilon>0$ existeix un n_0 tal que si $n\geq n_0$, $\|f_n-f\|_2<\varepsilon$.

Fixeu-vos que NO tenim condició de Cauchy com tenim amb la norma del suprem. Com hem comentat això ho resoldrem a final de curs. Ara, però, anem a demostrar la implicació important de totes aquestes definicions. Aquí ens oblidarem per un moment de la condició de continuïtat per tal de poder enunciar el lema amb tota generalitat.

Lema 1. *Sigui $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successió de funcions integrables Riemann en $[a,b]$, que convergeixen uniformement cap a f. Aleshores convergeixen en mitjana quadratica cap a f.*

Demostració. Vam veure al Capítol 1 que el límit uniforme de funcions integrables Riemann és també integrable Riemann. Per tant, f és integrable Riemann. Així doncs, expressions de la forma

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx$$

tenen sentit perquè l'integrand és integrable Riemann. Ara només cal ficar el valor absolut i anar amb cura: donat $\varepsilon > 0$, sigui n_0 tal que si $n \geq n_0$, es compleix que $\sup_{x\in[a,b]}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon/(b-a)^{1/2}$. Aleshores, per $n \geq n_0$:

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\, dx\right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \left(\int_a^b \frac{\varepsilon^2}{(b-a)}\, dx\right)^{1/2} = \varepsilon.$$

$\square$

Per tant, la convergència uniforme és un mode de convergència més dur que la convergència en mitjana quadràtica.

Per acabar, i per enllaçar amb el que veurem a la propera lliçó, deixem la següent definició. A hores d'ara no la podem aplicar en el nostra context perquè no tenim l'espai $\mathcal{X}$ que faci $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_2)$ complet.

Definició 2 (Espai de Hilbert)**.** Sigui X un espai vectorial on hi podem definir un producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$. Direm que X, junt amb aquest producte escalar és un espai de Hilbert i X junt amb la norma induïda per aquest producte escalar és un espai de Banach (i.e., un espai complet).

El primer exemple que ens ve al cap és $X = \mathbb{R}^n$ i prendre el producte escalar euclidià. La gran avantatge dels espais de Hilbert davant dels espais de Banach és que podem intentar imitar l'estructura geomètrica que ens dóna el producte escalar, com per exemple tenir un teorema de Pitàgores. Recordeu també que ara mateix no tenim exemples d'espais de Hilbert en espais de funcions, ja que l'espai de Banach que coneixem usa una norma que no prové del producte escalar.

En la propera lliçó donarem anàlegs del que pasa en $\mathbb{R}^n$ en espais de funcions on hi tenim on producte escalar, i en particular veurem el teorema de Pitàgores en un context més general: això ens donarà la desigualtat de Bessel i el primer resultat important d'aquest capítol: la igualtat de Parseval.

Lliçó 2: Espais de Hilbert

Recordeu de la lliçó anterior on varem definir espai de Hilbert:

Definició 3 (Espai de Hilbert)**.** Sigui X un espai vectorial on hi podem definir un producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$. Direm que X, junt amb aquest producte escalar és un espai de Hilbert i X junt amb la norma induïda per aquest producte escalar és un espai de Banach (i.e., un espai complet).

El que farem ara és intentar copiar l'estructura que tenim a $\mathbb{R}^n$ en aquest context més general, en particular la noció d'ortogonalitat.

Definició 4 (Sistema ortogonal; sistema ortonormal)**.** Donat un espai de Hilbert X amb el producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$, una família d'elements $\{\phi_n\}_{n\in I}$ de X direm que es un sistema ortogonal si compleix que

$$n \neq m,\ (\phi_n, \phi_m)_X = 0.$$

Si, a més a més, $(\phi_n, \phi_n) = 1$ per tot valor de $n \in I$, direm que el sistema $\{\phi_n\}_{n\in I}$ és ortonormal.

Observeu que tot sistema ortogonal és pot convertir fàcilment en un sistema ortonormal simplement normalitzant les funcions ϕ_n pel seu mòdul (és a dir, dividint entre $(\phi_n, \phi_n)_X$.

Veguem primer alguns exemples que seran molt importants en el que vindrà més endavant.

Exemple 1. Considerem $E = \mathcal{C}(-\pi,\pi)$ i la família de funcions $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\phi_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$ i $\psi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$. Aleshores $\{\phi_n\}_{n\geq 0} \cup \{\psi_n\}_{n\geq 1}$ és un sistema ortonormal. En efecte, recordant les relacions trigonomètriques següents:

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a-b)),\\
\sin(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)),\\
\cos(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),
\end{aligned}$$

és dedueix molt fàcilment (fent el càlcul de les integrals corresponents) que $(\phi_n, \phi_m) = (\psi_n, \psi_m) = 0$ si $n \geq 0$, $m \geq 1$ i $n \neq m$, mentre que $(\phi_n, \phi_n) = (\psi_n, \psi_n) = 1$ per tot valor de n.

Observeu que d'aquest exemple podem dir una cosa semblant si prenem un interval $(-L/2, L/2)$ en lloc de l'interval $(-\pi,\pi)$ si fem un canvi de reescalat de les variables (en el interval $(-L/2, L/2)$ caldria prendre la variable $n\frac{2\pi}{L}x$ en lloc de nx).

Exemple 2. Considerem ara un exemple traslladat de l'exemple anterior: considerem $\mathcal{C}(0,\pi)$. En aquest espai la família $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ amb $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$ és ortonormal.

Remarca 4. En tota la discussió que veurem més endavant treballarem principalment sobre l'espai $\mathcal{C}(-\pi,\pi)$, però coses similars es podrien dir sobre intervals centrats a l'origen i, fins hi tot, no necessariament centrats (fent reescalat i translacions en les variables).

El nostre objectiu es poder donar, en els nostres espais de funcions, criteris per els quals un sistema ortonormal sigui una base de l'espai vectorial subjacent. Observeu també que tot subconjunt d'un sistema ortonormal és també un sistema ortonormal, amb la qual cosa ens agradaria trobar-ne que siguin *maximals* amb aquest propietat. Dit d'altra forma:

Podem trobar un sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n\in I}$ en $E = \mathcal{C}(-\pi,\pi)$, que sigui a més una base de l'espai vectorial E? O que hi hagi alguna mena de convergència en sumes parcials?

Fixeu-vos que d'aconseguir-ho el que estariem fent és copiar l'estructura geomètrica que tenim a $\mathbb{R}^n$ en l'espai $\mathcal{C}(-\pi,\pi)$, ja que en particular tindrem una noció d'ortogonalitat, de distancia, etc. Fixeu-vos també que la segona pregunta és menys restrictiva, ja que en el nostre cas és possible que tinguem sumes infinites, i aleshores cal anar amb compte amb les questions de convergència.

Abans de veure que efectivament podrem definir aquest sistema ortonormal, anem a respondre una pregunta no menys important i que també ve inspirada pel què passa a $\mathbb{R}^n$: considerem en $\mathbb{R}^n$ una família de vectors $\{v_1,\ldots,v_k\}$, el subespai generat per ells H i un altre vector w.

Quin és el vector $v \in H$ que fa que $\|v-w\|$ sigui mínima (on estem prenent la norma euclidiana)? La geometria elemental (o no tan elemental...) ens diu que

$$\mathbb{R}^n = H \oplus H^{\perp},$$

i que per tant, $w = w_H + w_{H^\perp}$ on w_H i $w_{H^\perp}$ són ortogonals (i per tant, w_H és la projecció ortogonal de w en el subespai H). Ara un càlcul elemental (que essencialment és el teorema de Pitàgores) ens diu que el mínim $\|w-v\|$ s'assoleix precisament al prendre $v = w_H$.

Veguem-ho ara en el cas general d'espais vectorials en abstracte:

<u>Lema</u> 2. *Sigui E un espai vectorial dotat del producte escalar $(\cdot,\cdot)$. Sigui $f \in E$ i $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal. Sigui $a_n = (f, \phi_n)$, i definim*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k, \ \ g_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k, \ b_i \in \mathbb{R}.$$

Aleshores $\|f - f_n\|_2 \leq \|f - g_n\|_2$ i tenim igualtat si i només si $b_i = a_i$ per tots els índexos i.

Abans de fer la prova (que és la que faríem en $\mathbb{R}^n$) observeu el que diu el lema: la millor aproximació de f per una funció f_n en el subespai generat per $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ ve donada per la projecció ortogonal en aquest subespai (la projecció ortogonal ens determina els coeficients a_i).

Demostració. Anem primer a calcular $\|f - g_n\|_2^2$. Aquí el que estarem fent és usar la versió abstracta del teorema de Pitàgores:

$$\|f-g_n\|_2^2 = (f-g_n, f-g_n) = (f,f) - 2(f,g_n) + (g_n,g_n) = \|f\|_2^2 + \|g_n\|_2^2 - 2(f,g_n).$$

Anem ara a desenvolupar els termes que depenen de g_n. Per una banda,

$$(f, g_n) = \left(f, \sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k (f, \phi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Per altra banda,

$$\|g_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Per tant,

$$\|f-g_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \overbrace{\|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2.$$

Fixeu-vos ara que el terme en $\overbrace{\cdot}$ és fix i només depèn de f (i del sistema ortonormal), i que el segon terme és una suma de quadrats (per tant, positiva). Aquesta suma serà el més petita possible quan prenguem precisament $b_k = a_k$ per tots els índexs possibles.

En aquesta situació, el que obtenim és que

$$\|f-g_n\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

però aquesta expressió és igual que $\|f - f_n\|_2^2$, que és el que volíem demostrar. □

Observeu de la prova que, a mesura que agafem més termes (n) en les sumes $\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ haurien de ser cada cop més i més semblants a f. En efecte, això passarà quan hi hagi convergència en aquesta norma:

<u>Teorema</u> 1. *Sigui E un espai vectorial amb un producte escalar $(\cdot,\cdot)$, i sigui $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal. Per $f \in E$, sigui*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k, \ a_k = (f, \phi_k).$$

Aleshores:

(Desigualtat de Bessel) $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ *convergeix i satisfà que* $\sum_{k\geq 1} a_k^2 \leq \|f\|_2^2$.

(Identitat de Parseval) *Si, a més,* $\lim_n \|f - f_n\|_2 = 0$ *(hi ha convergència quadràtica de* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *cap a* f*), aleshores de fet tenim que*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 = \|f\|_2^2.$$

Demostració. Per a veure la desigualtat de Bessel, basta usar el teorema anterior. Hem vist abans que $0 \leq \|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2$, d'on tenim que per tot valor de n, es compleix que $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \|f\|_2^2$. Per tant, al pasar al límit n tendint a infinit també serà cert. Això demostra la desigualtat de Bessel.

La identitat de Parseval també la trobem inmediatament si fem tendir a 0 el terme $\|f - f_n\|_2^2$ en l'identitat $\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2$. □

Deixarem aquí la lliçó per avui comentant un parell de coses importants a tenir en ment:

- Per a tenir la identitat de Parseval ens cal poder assegurar la convergència quadràtica, cosa que a priori encara no hem estudiat amb calma. El que veurem en la propera lliçó és que en el nostre espai de funcions $\mathcal{C}(-\pi, \pi)$ (de fet, en un espai una mica més restringit per un costat, però més àmpli per un altre...) podrem definir els ϕ_n i els coeficients a_k i podrem fer tota la feina (en particular, assegurar convergència quadràtica). Això serà precisament les sèries de Fourier que donen títol al capítol.

- Un problema més dificil serà el d'estudiar quan un sistema ortonormal és una base. De fet el tipus de questions que estudiarem seran la convergència puntual, i veurem que en alguns punts (especialment els punts de discontinuïtat, perquè estudiarem funcions discontínues) presentaran un comportament ben peculiar (serà el contingut del teorema de Dirichlet, que serà el resultat fonamentel de la propera part).

Lliçó 3: funcions contínues a trossos, funcions suaus i la seva sèrie de Fourier

Si recordeu la lliçó anterior, vam estar parlant (en abstracte) de sistemes ortonormals, generalitzacions del teorema de Pitàgores i, per la part que ens toca, el resultat més important: la igualtat de Parseval.

Ara tornarem als casos concrets. D'aquí en endavant estudiarem funcions més generals que les funcions contínues en intervals.

Definició 5. Considerem les següents famílies de funcions:

- (**Funcions contínues a trossos**) Denotarem per $\mathtt{PC}[a,b]$ el conjunt de funcions contínues definides en $[a,b]$ que són contínues llevat d'un nobre finit de punts, on els límits laterals existeixen.

- (**Funcions suaus**) Denotarem per $\mathtt{PS}[a,b]$ les funcions f definides en $[a,b]$ tal que tant f com f' són elements de $\mathtt{PC}[a,b]$.

Anem a precisar una mica més que volem dir amb la definició de funció suau. És clar que si tenim una funció contínua a trossos f, en cada punt de continuïtat de f, aleshores en tot punt de continuïtat podem tenir (o no) derivada. El que ens diu la segona condició es que els punts on no és derivable és un conjunt finit. Dient-ho de manera informal: els punts on la funció f no és derivable són aquells on f té "punxes"o bé en els punts on f no és derivable.

Què passa amb f' en els punts on f té una discontinuïtat de salt? Aquest és un tema delicat que parlarem més endavant (especialment en la part de conseqüències). La qüestió és que en termes de definir funció suau (dit d'altra manera, de saber identificar si una funció és suau o no ho és), ens podem ficar amb el següent conveni: en els punts x on f té una discontinuïtat (que és un conjunt discret), definirem $f'(x)$ com un dels dos límits laterals. Veurem que el que passa en el punt és una mica delicat tècnicament desde el punt de vista de l'integració (ho discutirem més endavant).

Observeu que és clar que les funcions $\mathtt{PS}[a,b]$ só clarament integrables Riemann, i per tant podem definir la norma 2 de la que hem estat parlant fins ara. En particular, podem parlar també de convergència quadràtica en aquest espai.

Serà útil també pensar en la generalització d'aquests espais de funcions quan el domini és tot $\mathbb{R}$: denotarem per $\mathtt{PC}(\mathbb{R})$ i $\mathtt{PS}(\mathbb{R})$ les funcions definides a $\mathbb{R}$ tal que en qualsevol interval fitat defineixen una funció contínua a trossos o suau, respectivament.

Observeu que ambdues situacions, tota funció $f \in \mathtt{PS}[a,b]$ (o en $\mathtt{PC}[a,b]$) defineix una funció en $\mathtt{PS}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathtt{PC}(\mathbb{R})$) tot prenent l'extensió periòdica de la funció. Per tal de no tenir problemes de definició podem pensar que en la periodificació de la funció $f(a) = f(b)$. Altrament quan prenem la periodificació de la funció el que obtenim és una discontinüitat de salt en els punts de la forma $a + (b-a)k$, on k és un enter.

Ja podem passar a fer la definició fonamental d'aquest capítol:

Definició 6. Sigui $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$. La sèrie de Fourier trigonomètrica de f és la funció $S_f(x)$, que dóna, per cada $x \in [-\pi,\pi]$, el valor

$$S_f(x) = \lim_N S_f^N(x) = \lim_N \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

on

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

Anem a comparar aquests valors amb els que varem veure a la lliçó anterior. Per una banda si fem

$$\phi_m = \cos(mx),\ \psi_n(x) = \sin(nx),$$

en el primer cas per $m \geq 0$ i pel segon per $n \geq 1$, aleshores

$$(\phi_0,\phi_0) = 2\pi,\ (\phi_n,\,\phi_n) = (\psi_n,\psi_n) = \pi,$$

si $n \geq 1$. Per altra banda, tenim que, per exemple pels a_n tenim que

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)},$$

Si ho compareu amb el que varem veure a la lliçó anterior,el càlcul el varem realitzar per un sistema ortonormal (i per tant normalitzat). En el nostre cas que estem veient ara els cosinus i els sinues (i la constant) no estan normalitzats , i es per això que cal normalitzar-lo

Ho podeu pensar de la seguent forma: si $g = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i$, i els v_i són ortogonals, aleshores

$$(f, v_i) = (\sum_{i=1}^{N} a_i v_i, v_i) = a_i (v_i, v_i),$$

d'on surt el que deiem abans.

<u>Remarca</u> 5. Diversos comentaris

- Observeu que el terme a_0 apareix dividit entre 2. Això passa pr a que la definició de a_n sigui consistent amb els cosinus.
- Si prenem l'interval $[-L/2, L/2]$, teni també sèries de Fourier però intergrant respecte a $\cos(\frac{2\pi}{L} nx)$ i no $\cos(nx)$.
- El mateix aplica si prenem intervals oberts en lloc d'intervals tancats (les integrals no varien si afegim o traiem els punts extrems de l'interval)

Observeu que la sèrie de Fourier trigonomètrica $S_f(x)$ l'hem definit com el límit (puntual) de la successió de funcions $\{S_f^N(x)\}_{n \geq 1}$. Es bo que identifiqueu la definició amb els termes que hem vist a la lliçó anterior (recordeu que els sinus i els cosinus són ortogonals).

El nostre objectiu és veure com es comporta S_f en relació a f. En particular, el que veurem és que:

1. **Convergència puntual:** veurem que per tot punt x de continuïtat de f, $S_f^N(x)$ convergirà puntualment cap a $f(x)$. Pels punts de discontinuïtat també veurem què passa (Teorema de Dirichlet).
2. **Convergència en norma:** Veurem que no només hi haurà convergència puntual, sino que hi haurà convergència en la norma quadràtica: veurem que $\|S_f^N - f\|_2$ tendirà a 0. Per tant, tindrem una relació de tpus Parseval.

Fixeu-vos que en cap moment estem dient que els sinus i els cosinus són una base: el que estem dient és que les sumes infinites definides per les sèries de Fourier convergeixen puntualment (en els punts de continuïtat) i que no només això, sino que la convergència que hi ha és de tipus quadràtic. Comentarem més endavant què passa amb la convergència uniforme, que veurem que en general NO es satisfarà.

<u>Remarca</u> 6. Observeu que la funció $S_f(x)$ (si f està definida en $[-\pi, \pi]$, de fet està definida en tot $\mathbb{R}$. Això el que diu és que la sèrie de Fourier de fet defineix una funció $\texttt{PS}(\mathbb{R})$. Els únics punts on cal anar amb compte és enels múltiples de π. Quan enunciem el teorema de Dirichlet veurem què passa en aquests punts (podria ser que la funció no enganxi bé).

Per les proves (i en la llista de problemes), estudiarem també una variació de la definició de sèrie de Fourier trigonomètrica, en el context de funcions reals que prenen valors complexos.

Usant la realació $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ i la relació inversa

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-\alpha}\right), \sin(\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

Si substituïm aquestes expressions del sinus i el cosinus en la sèrie de Fourier trigonomèrica obtenim l'expressió equivalent

$$S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} + e^{-inx}),$$

que pot escriure's com

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}\,, c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}\ (k>0),\ c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}\ (k<0),$$

o, en sentit contrari, $a_k = 2\texttt{Re}(c_k)$, $b_k = -2\texttt{Im}(c_k)$.

Tot això ho podem ficar en una definició

Definició 7. Sigui $f \in \texttt{PS}[-\pi,\pi]$. La sèrie de Fourier complexa de f és la funció $SC_f(x)$, que dóna, per cada $x \in [-\pi,\pi]$, el valor

$$SC_f(x) = \lim_N SC_f(x) = \lim_N \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

on

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx.$$

Fixeu-vos que la sèrie de Fourier trigonomètrica i la sèrie de Fourier complexa són essencialment el mateix, el que passa és que usem diferents sistemes ortonormals. Fixeu-vos que, de fet, el conjunt $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, amb $\tau_k(x) = e^{ikx}$ forma un conjunt ortogonal en $[-\pi,\pi]$ (amb valors complexos), i que per tant tot el que hem dit funciona igual.

L'únic punt que cal remarcar aquí és que si les funcions que considerem són de variable real PERÒ prenent valors complexos (com està passant aquí), el producte escalar que cal prendre és el seguent:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

altrament no podriem afirmar que $(f,f) \geq 0$ sempre.

Dit tot això, en la propera lliçó començarem ja a demostrar resultats relatius a la convergència puntual.Un tal resultat de fet serà igualment vàlid per les sèries de Fourier trigonomètriques com les complexes. Com veurem, treballar amb exponencials farà la cosa molt més fàcil.

Lliçо 3: El teorema del nucli de Dirichlet.

Si recordeu la lliçó anterior , vam definir la noció de sèrie de Fourier complexa d'una funció $f \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ com

$$\lim_N SC_f^N(x) = \lim_N \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx},$$

on

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{ikx}}\, dx.$$

Això és pot interpretar tenint en compte que el conjunt $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ defineix una família ortogonal respecte al producte hermític definit en funcions reals en l'interval $[-\pi, \pi]$ que prenen valors complexos definit per

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Fixeu-vos que aquesta definició de producte hermític encaixa perfectament en el cas de funcions que prenen valors reals. Per tant aquest producte hermític és, de fet una generalització a variable complexa del producte escalar en funcions que prenen valors reals (com hem estat fent fins ara).

Observeu també que en aquesta situació $(e^{ik_1 x}, e^{ik_2 x}) = 0$ si $k_1 \neq k_2$, i val 2π si $k_1 = k_2$. D'aquí doncs tenim el terme 2π que està dividint.

En aquesta lliçó veurem resultats de convergència puntual de $\{SC_f^N(x)\}_{N \geq 1}$. Observeu que tot resultat de convergència puntual d'aquesta successió es podrà traduir inmediatament a un resultat de convergència puntual per la sèrie de Fourier trigonomètrica $S_f^N(x)$, ja que segons vam veure, $S_f^N(x)$ és identicament igual a $SC_f^N(x)$ per tot x i per tot N.

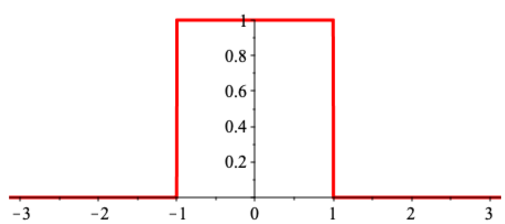
El resultat fonamental que tindrem serà el següent:

Teorema 2 (Teorema de Dirichlet)**.** *Sigui $f \in PS[-\pi, \pi]$. Considerem la seva corresponent extensió periòdica a tot $\mathbb{R}$ (que per abús de notació també denotarem per f). Considerem aleshores $\{SC_f^N\}_{N \geq 1}$. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$,*

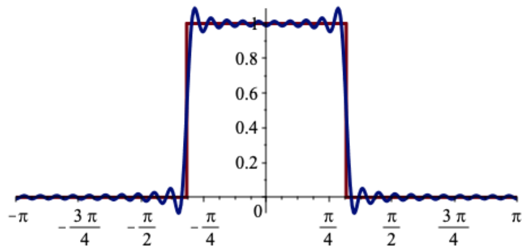
$$\lim_N SC_f^N(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

on $f(x^+)$ i $f(x^-)$ són els límits laterals de f quan la variable s'apropa a x per la dreta i per l'esquerra, respectivament.

Veguem un exemple. Si prenem la funció f que val 1 entre -1 i 1, i 0 fora, és clar que és una funció suau, que té el següent aspecte:



Ara ho comparem amb la sèrie de Fourier, que la dibuixem per $N = 20$:



El que s'observa és que la sèrie de Fourier aproxima molt bé la funció inicial. De fet, el teorema de Dirichlet ens diu que punt a punt, l'aproximació cada cop és millor, llevat dels punts de discontinuïtat, en que el límit és el punt mig. Això és el que passa també en la gràfica de la figura.

Anem a veure, abans de demostrar-lo, algunes conseqüències importants del teorema. La primera (i la més important) és que si els límits laterals coincideixen, $f(x^+) = f(x^-)$, i aquests són iguals a $f(x)$. Per tant, la conseqüència clau del teorema de Dirichlet és que

Si $f \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ és contínua en x,
aleshores $S_f^N(x)$ convergeix puntualment cap a $f(x)$.

L'altra observació important és que en les discontinuïtats de salt (que són les que tenim en la nostra situació) el límit puntual de la sèrie de Fourier no coincideix amb el valor de la funció f en el punt: coincideix amb la mitja aritmètica entre els seus límits. És per aquesta raó que no podem dir que la sèrie de Fourier coincideixi punt a punt amb la funció inicial, sino només que això és vàlid en els punts de continuïtat de f.

Prova del teorema de Dirichlet usant el nucli de Dirichlet

Anem ara a demostrar el teorema de Dirichlet. Per a fer-ho ens caldrà introduir una funció fonamental en anàlisi:

Definició 8. Sigui $N \in \mathbb{N}$. El *nucli de Dirichlet* és

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

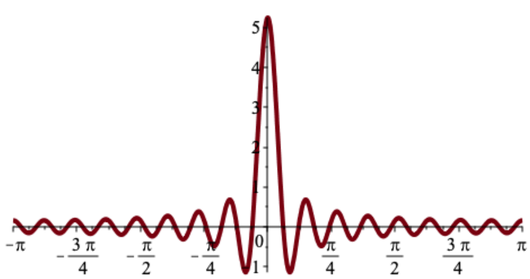
Aquesta funció de variable real que pren valors complexos, de fet pren valors reals. En efecte, per una banda, desenvolupant les exponencials en termes del sinus i cosinus tenim:

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \cos(nx). \tag{1}$$

Per altra banda, observeu que $D_N(z)$ està expressat en termes d'una suma geomètrica (i després recordant la fòrmula del sinus en termes d'exponecials) que pot desenvolupar-se per obtenir

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x-e^{-iNx}}}{e^{ix}-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left((N+1/2)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right).} \tag{2}$$

Aquesta gràfica, a mesura que N augmenta, el que fa es que es concentra cada vegada més al voltant de $x = 0$. Aquí la dibuixem per $N = 15$:



Per tant, es pot dir que és un model d'una funció contínua que aproxima (cada cop millor) una funció que es concentra en un punt (pels que ho hagueu vist en enginyeria: la delta de Dirac és el "límit" en un cert sentit que no veurem en aquest curs d'aquesta successió de funcions).

Dues propietats importants que usarem del nucli de Dirichlet són les següents:

1. Usant la identitat (1) tenim que

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Això és cert perquè les intergrals del cosinus en l'expressió (1) valen totes 0.

2. $SC_f^N(x)$ és pot expressar en termes de f i de $D_N(x)$ de la següent forma. En el càlcul que farem és especialment important pensar no en f definida en $[-\pi,\pi]$, però en la seva extensió a tot $\mathbb{R}$. Si recordem que $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, aleshores,

$$SC_f^N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}\,dz\right)e^{inx}.$$

Fent ara $n=-m$ i reescribint-ho en termes d'aquest canvi de notació, així com intercanviant la suma finita amb l'integral, tenim que l'anterior és igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{imz}\,dz\right)e^{-imx} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{im(z-x)}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)e^{imu}\,du,\end{aligned}$$

on en l'última igualtat hem fet el canvi de variables $z-x=u$ i l'integral l'estem considerant sobre l'extensió periòdica de f a tot $\mathbb{R}$. Finalment, si ara intercanviem de nou el sumatori i l'integral, arribem a la següent relació, que serà el punt de partida de la prova del teorema de Dirichlet.

$$SC_f^N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u)\,du. \tag{4}$$

Ara ja tenim tots els ingredients per a poder passar a demostrar el teorema de Dirichlet. Anem-ho a veure. Com veurem, caldrà usar en un cert moment que la derivada de f també és una funció contínua a trossos.

Comencem: el que farem serà comparar, per un x donat, $SC_f^N(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. Anem-ho a desenvolupar en termes del nucli de Dirichlet. Així:

$$\begin{aligned}SC_f^N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= SC_f^N(x) - f(x^+)\int_0^{\pi} D_N(y)\,dy - f(x^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(y)\,dy\\ &= \int_{-\pi}^{0}(f(x+y)-f(x^-))D_N(y)\,dy + \int_0^{\pi}(f(x+y)-f(x^+))D_N(y)\,dy. \end{aligned}\tag{5}$$

Ara volem juntar aquestes dues integrals. Per a fer-ho, definim la següent funció:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)-f(x^-)}{e^{iy}-1},\ y\in[-\pi,0),\\ \frac{f(x+y)-f(x^+)}{e^{iy}-1},\ y\in(0,\pi].\end{cases}$$

Anem a estudiar com cal definir g en $y=0$. En aquest punt $g(y)$ no està definida, però podem calcular els límits laterals (i per tant associar-li un valor a $g(0)$ per tal que estigui definida en aquest punt). Usant el teorema de l'Hôpital (si no us convenç, podeu fer-ho per la part real i part imaginaria per separat...), obtenim que

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = -if'(x^+),\ \lim_{y\to 0^-} g(y) = -if'(x^-).$$

Observeu que ambdos límits $f'(x^+)$ i $f'(x^-)$ existeixen perquè $f\in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$, i per tant $g\in\mathtt{PC}[-\pi,\pi]$. En particular, aquí només estem usant que els límits laterals de f' existeixen, i no estem avaluant la funció f' en els seus punts de discontinuïtat.

Tornem ara al càlcul que estavem fent. Recordant l'expressió de $D_N(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)y - e^{-iNy}}}{e^{iy}-1}$, tenim que (5) s'escriu com

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy})\,dy.$$

Anem ara a usar que $g(y)$ (al ser una funció contínua a trossos) admet una sèrie de Fourier complexa. Denotem per $\widehat{C_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iNy}\,dy$. Aleshores, està clar

$$SC_f^N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \cdots = SC_f^N\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) = \widehat{C_{-(N+1)}} - \widehat{C_N}.$$

Com concloem ara? Usarem la desigualtat de Bessel: el que ens deia és que la suma al quadrat dels coeficients de la sèrie de Fourier (complexa o trigonòmetrica) està fitada per $\|f\|_2^2$, i en particular, els coeficients tendeixen a 0. Per tant, el que estem dient en aquest cas és que $\lim_N \widehat{C_{\pm N}} = 0$. I això ens demostra que $\lim_N \widehat{C_{-(N+1)}} - \widehat{C_N} = 0$. Per tant, donat $\varepsilon > 0$ existeix un N_0 prou gran tal que si $N \geq N_0$ es compleix que

$$\left| SC_f^N(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| < \varepsilon,$$

d'on deduïm que el límit puntual de $SC_f^N(x)$ és $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, tal i com volíem veure. $\square$

En la propera lliçó aplicarem aquest resultat en diversos contextos. En particular, veurem què podem dir per les derivades d'una funció (sempre que existeixin).

Lliçó 5: Conseqüències del teorema de Dirichlet.

Recordeu que en la lliçó anterior hem demostrat el resultat més important del capítol: el teorema de Dirichlet. Aquest teorema ens diu cap a on convergeix la successió de punts $\{SC_f^N(x)\}_{N\geq 1}$ per un x donat i f sent una funció suau definida en l'interval $[-\pi,\pi]$:

Teorema 3 (Teorema de Dirichlet)**.** *Sigui $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$. Considerem la seva corresponent extensió periòdica a tot $\mathbb{R}$ (que per abús de notació també denotarem per f). Considerem aleshores $\{SC_f^N\}_{N\geq 1}$. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_N SC_f^N(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

on $f(x^+)$ i $f(x^-)$ són els límits laterals de f quan la variable s'apropa a x per la dreta i per l'esquerra, respectivament.

El que veurem en aquesta lliçó es que podrem usar aquest resultat (que ens afirma convergència puntual cap a f si aquesta és de fet contínua) per deduïr-ne molts d'altres relatius a funcions associades a f. En tota la deducció treballarem novament amb l'idea que ja hem gastat en el passat de confondre una funció amb la seva extensió periòdica.

Derivada de f: Anem a veure com és comporta la sèrie de Fourier de la derivada d'una funció donada.

Lema 3. *Sigui f una funció contínua, $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ amb $f(\pi) = f(-\pi)$. Siguin $\{a_n, b_n\}_{n\geq 0}$ i $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ els coeficients de la sèrie de Fourier trigonomètrica i complexa, respectivament. Sigui $\{a_n', b_n'\}_{n\geq 0}$, $\{c_n'\}_{n\in\mathbb{Z}}$ els coeficients de la sèrie de Fourier trigonomètrica i complexa de $f' \in \mathcal{PC}[-\pi,\pi]$. Aleshores,*

$$a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n,\ c_n' = inc_n.$$

Demostració. Essencialment el que ens està dient aquest lema es que podem derivar terme a terme la sèrie de Fourier, i que la sèrie resultant serà la sèrie de Fourier de la funció derivada.

La prova és una simple integració per parts. Farem el càlcul per les c_n, però per les a_n i les b_n es fa exactament igual. Calculem c_n' :

$$\begin{aligned} c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} u = e^{-inx} \to du = (-in)e^{-inx} \\ f'(x)\,dx = dv \to f(x) = v \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}\right) + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \end{aligned}$$

i això és igual a inc_n, perquè el primer terme s'anul·la ($f(\pi) = f(-\pi)$) i el segon és inc_n. El resultat per les a_n i b_n surt traien part real i part imaginaria, o fent el càlcul directament amb els sinus i cosinus. □

Observation 1. *Aquí hi ha una observació molt important que vull remarcar: l'ús de la continuïtat. Quan realitzem la integral indicada de $f'(x)$, al realitzar l'integració per parts cal triar una primitiva de la mateixa. Fixeu-vos que si no assumim que f és contínua no sabem quina primitiva cal triar. Això és degut a les discontinuïtats de salt.*

La qüestió, però, és molt més subtil. Per a mirar-ho, veguem un exemple concret. Considerem la funció $f(x)$ definida en $[-\pi,\pi]$ com $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, i 0 altrament. És clar que té una discontinuïtat de salt en els punts $x = \pm 1$. És una funció contínua a trossos i que compleix que f' val 0 en tots els punts on té sentit preguntar-se per f' (no estem dient res de $f'(1)$ i $f'(-1)$). En particular NO és contínua i f' (on està definida) val 0.

Calculem els coeficients de la sèrie de Fourier complexa de f. Per $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{-1}^{1}$$

i aquest terme és igual $\frac{\sin(n)}{\pi n}$. Per altra banda, si $n = 0$, l'integral val $\frac{1}{\pi}$. En particular, és clar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$. Què passa ara amb f'? Si el teorema anterior fos cert i f' fos contínua a trossos en el sentit estricte de la paraula la seva sèrie de Fourier hauria de tenir *tots els coeficients iguals a 0, i per tant, no lliga amb el que acabem de demostrar. Quin és el problema? La qüestió és que f'* no és idènticament igual a 0 a tot arreu, *i se li pot donar un significat en el context de la teoria de distribucions. Veguem-ho. Per a fer-ho calculem la següent integral on g és qualsevol funció derivable en $(-\pi, \pi)$ per la qual $g(\pi) = g(-\pi)$. Fent integració per parts obtenim:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g(x)\,dx = (f'(x)g(x)|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} g'(x)\,dx = g(1) - g(-1),$$

que és, en general diferent de 0.

Resumint: *en realitat, si f és una funció suau, la seva funció derivada en realitat no té perquè existir en el sentit de funció, tot i que nosaltres estem fent l'abus de prendre-ho com un objecte que té sentit puntual en tots els punts de continuïtat de f. Ara bé, desde el punt de vista de les integrals, la manera com actua una tal funció és molt diferent, tal i com estem observant en aquest exemple. Per tant, si f és una funció suau:*

- *Podem usar f' si volem calcular límits laterals, tal i com hem usat en la prova del teorema de Dirichlet.*
- *Desde el punt de vista de les sèries de Fourier, la sèrie de Fourier de f' té coeficients c_n' tal i com està descrit en el teorema (encara que f no sigui contínua). Ara bé, f' NO és una funció en el sentit estricte, és el que s'anomena una distribució. En particular, de l'exemple anterior veiem que no té perquè ser cert aquí que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$.*

El problema tècnic ve doncs de "derivar en una discontinuïtat evitable". Si això no passa tot funciona bé, altrament tenim un problema amb la funció derivada sempre que es consideri dins d'una integral.

En el següent punt sí que l'usarem per tal d'assegurar que $f' \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ i poder assegurar convergència puntual:

Teorema 4. *Sigui $f \in PS[-\pi, \pi]$ tal que la seva extensió periòdica és contínua a tot $\mathbb{R}$. Suposem que $f' \in PS[-\pi, \pi]$. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2}(f'(x^+) + f'(x^-)) = S_{f'}(x) = SC_{f'}(x),$$

on $S_{f'}(x) = \sum_{n\geq 1} nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx)$, $SC_{f'}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ikc_k e^{ink}$. A més a més, aquest terme és igual a $f'(x)$ si f' és contínua.

Demostració. Basta aplicar el lema anterior en quant al càlcul dels coeficients i el teorema de Dirichlet en quant a la convergència puntual. □

Observeu que efectivament en aquest teorema no ens calia que la funció f' fos contínua, únicament que si això no és així no podem afirmar convergència puntual llevat dels punts de continuïtat de f'. A més a més, és necessaria la condició $f' \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ per a poder afirmar que podem aplicar el teorema de Dirichlet.

Si ara iterem aquest resultat k vegades, obtenim la següent conclusió:

Teorema 5. *Sigui $f \in PS[-\pi, \pi]$ amb la seva corresponent extensió periòdica. Supossem a més que $f \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$, i $f^{k-1)} \in PS(\mathbb{R})$. Considerem les sèries de Fourier trigonomètrica i complexa de f, amb coeficients $\{a_n, b_n\}_{n\geq 0}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Aleshores les sumes*

$$\sum_{n\geq 1} n^{2k} a_n^2, \ \sum_{n\geq 1} n^{2k} b_n^2, \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k} |c_n|^2$$

són convergents. En particular, $\lim_n n^k a_n = \lim_n n^k b_n = \lim_n n^k c_n = 0$.

Demostració. Iterant el teorema anterior $k-1$ vegades trobem que els coeficients de la sèrie de Fourier de $f^{k-1)}$ són $\{\pm n^k a_n, \pm n^k b_n\}_{k\geq 1}$ i $\{\pm i^k n^k c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que tenen mòdul com s'indica a les sumes anteriors. Ara de nou, per la desigualtat de Bessel aquestes sumes són fitades per $\|f^{k-1)}\|_2^2$, d'on tenim que són convergents. La segona part (el límit dels coeficients) és clarament 0 per ser sumes convergents. □

Modes de convergència de la sèrie de Fourier: ja hem vist que sota l'hipòtesis de que $f \in \texttt{PS}[-\pi,\pi]$ podem afirmar que les sèrie de Fourier convergeixen puntualment cap a f en tots els punts de continuïtat de f, i que el límit és $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$ si f no és contínua en x.

Ara anirem una mica més enllà per a veure què passa si f és contínua arreu. El següent teorema el segon important del capítol) ens afirma que la convergència de la sèrie de Fourier no només és puntual, sino que és uniforme en tot $\mathbb{R}$.

<u>**Teorema**</u> **6** (Convergència uniforme de la sèrie de Fourier per a funcions contínues)**.** *Sigui $f \in \texttt{PS}[-\pi,\pi]$ tal que la seva extensió periòdica a $\mathbb{R}$ és contínua. Aleshores $\{SC_f^N\}_{N\geq 1}$ convergeix absolutament i uniformement en $\mathbb{R}$ cap a f.*

Demostració. Farem la prova per la sèrie de Fourier complexa, però el mateix tipus d'argument es pot fer per la sèrie de Fourier trigonomètrica. Ja sabem que sota aquestes hipòtesis de continuïtat, pel teorema de Dirichlet, per tot x real $\{SC_f^N(x)\}_{N\geq 1}$ convergeix puntualment cap a $f(x)$.

Anem a veure què ens cal per a demostrar el que ens demanen. Observeu que

$$|SC_f(x)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

Per tant, si aconseguim demostrar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ (recordeu que això ho sabem per la suma dels quadrats!) tindrem que:

1. La convergència és absoluta, ja que la suma de valors absoluts és fitada.
2. Calculem la norma del suprem a tot $\mathbb{R}$:

$$\|SC_f^N - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |SC_f^N(x) - f(x)| \overset{(1)}{=} \max_{x\in[-\pi,\pi]} |SC_f^N(x) - f(x)|$$
$$\overset{(2)}{=} \max_{x\in[-\pi,\pi]} |SC_f^N(x) - SC_f(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} \left|\sum_{|k|\geq N+1} c_k e^{ikx}\right| \leq \sum_{|k|\geq N+1} |c_k|,$$

   on hem usat en (1) que totes les funcions són periòdiques de periode 2π i en (2) hem usat que puntualment f i $SC_f(x)$ no les podem distingir. Això doncs, si la suma $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, aleshores la suma de les cues tendeix a 0 i per tant, donat $\varepsilon > 0$ podem trobar un N_0 tal que si $N \geq N_0$, es té que $\sum_{|k|\geq N+1} |c_k| < \varepsilon$, d'on deduïm que $\|SC_f^N - f\|_\infty < \varepsilon$.

Per tant, l'objectiu del teorema és demostrar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

L'observació important és que NOMÉS usant que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ (Bessel) no ens en sortirem: hi han successions de nombres (com $A_k = \frac{1}{k}$) que compleixen que la suma dels seus quadrats és convergent, però no la suma ella mateixa. Per tant, ens caldrà alguna cosa més.

Considerem a tal efecte f', que sabem que està definida (llevat de punts de discontinuïtat, on aquestes són de salt). Segons hem vist, els coeficients de la sèrie de Fourier complexa c'_k són iguals a ikc_k, i aplicant de nou Bessel aquí tenim que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$$

Això ens dóna més informació sobre els coeficients de Fourier de f. En efecte:

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq N} |c_k| &= |c_0| + \sum_{|k|\leq N, k\neq 0} \frac{|c'_k|}{k} \overset{(C-S)}{\leq} |c_0| + \left(\sum_{|k|\leq N, k\neq 0} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{|k|\leq N, k\neq 0} |c'_k|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2\right)^{1/2} = K,
\end{aligned}$$

on C és una constant fixa que depèn de la suma infinita $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Fixeu-vos que $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2\right)^{1/2}$ també és finita perquè els coeficients c'_k venen de la sèrie de Fourier de f', i podem de nou aplicar Bessel per fitar la suma per $\|f\|_2$. Per tant, com aquesta fita que hem trobat (K) es vàlida per tota tria de N, tenim finalment que

$$\lim_N \sum_{|k|\leq N} |c_k| \leq K < \infty,$$

que és el que volíem veure. $\square$

Aquest resultat té conseqüències importants. Com ja sabem la convergència uniforme implica la convergència en mitjana quadràtica. Per tant, no només tindrem la desigualtat de Bessel, sino que tindrem (sempre que f sigui contínua i $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$) la identitat de Parseval.

Què passa per les funcions que són suaus, però no contínues? Aquí podem usar el que acabem de demostrar per a veure el següent:

Teorema 7. *Sigui $f \in PS[-\pi,\pi]$. Aleshores $\lim_N \|f - SC_f^N\|_2 = 0$, i per tant tenim convergència quadràtica de la sèrie de Fourier cap a f.*

Fixeu-vos que aquí no podem usar en general que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, ja que és possible que f' no sigui una funció en el sentit que estem tractant (veure l'observació anterior). Per a tenir aquesta condició ens cal una condició de regularitat més fortes de cara a f'.

Demostració. La prova és intuïtiva, i donem només l'idea de fons. Suposarem que només hi ha una discontinuïtat en el punt $-\pi < a < \pi$ (si n'hi haguessin més raonariem igual) Anem a supossar que a no és igual a $\pm\pi$ (ja que si ho són, de fet no influeixen en l'integral corresponent a la norma 2). Sabem que en aquestes condicions el teorema de Dirichlet ens diu que, per cada punt x en $[-\pi,\pi]$, $SC_f(x)$ val $f(x)$, llevat del punt $x = a$, on valen diferent. En particualr, $SC_f(x)$ és integrable Riemann perquè f ho és. Això ens diu que $\|f - SC_f\|_2 = 0$, ja que estem integrant dues funcions identiques i que només difereixen en $x = a$.

Aleshores, tenim que, usant SC_f^N i la desigualtat triangular:

$$\|f - SC_f^N\|_2 \leq \|f - SC_f\|_2 + \|SC_f^N - SC_f\|_2 = \|SC_f^N - SC_f\|_2 = \left(\sum_{|k|\geq N+1} |c_k|^2\right)^{1/2},$$

i aquesta suma és la cua de la suma $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$, que és finita per la desigualtat de Bessel. Per tant, podem prendre N prou gran de tal forma que això sigui més petit que ε, que és el que voliem demostrar. $\square$

Tornarem a aquest teorema més endvant en un context més general, en el marc de l'anomenat teorema de Riesz-Fischer.

Com a conseqüència de l'anterior tenim el següent:

Teorema 8 (Identitat de Parseval, v2)**.** *Sigui $f \in PS[-\pi,\pi]$. Aleshores*

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2\right).$$

Demostració. El resultat és fàcil, perquè quan $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$ i contínua en la seva extensió a $\mathbb{R}$ hem vist que hi ha convergència quadràtica, que era l'ingredient que faltava a la desigualtat de Bessel per a poder afirmar l'identitat de Parseval. $\square$

Amb això acabem el capítol 3. Falten però, diverses coses per les que no tenim encara resposta.

- Hem vist que l'espai de funcions contínues respecte a la norma quadràtica no és complet (tenim successions de Cauchy que no tenen límit una funció contínua). Quin és aquest espai on hi podem ficar la norma quadràtica i l'espai sigui complet?

- Per a demostrar, en el cas de funcions contínues i suaus, que hi ha convergència quadràtica, hem usat de fet resultats més forts, com la convergència uniforme. Això ens ha permès donar l'identitat de Parseval en aquest context. Què podem dir de la convergència quadràtica quan eliminem la condició de continuïtat? Què ens cal realment per a poder afirmar convergència quadràtica?

- Hem vist que la convergència quadràtica, junt amb Bessel implica Parseval. Però, de fet, el que veurem també és que Parseval implica convergència quadràtica.

Aquestes dues preguntes, i més que vindran seguidament requeriran de generalitzar la noció d'integral a un espai de funcions més general que el de les integrables Riemann. Això ens portarà a l'úlima part del curs: el desenvolupament d'una teoria d'integració més genreal que l'integració de Riemann: l'anomenada integració de Lebesgue i la teoria de la mesura.