

WAVELETS: CONSTRUCCIÓ I APLICACIONS

Notes de Classe

J. M. Aroca

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica,
Universitat Politècnica de Catalunya

e-mail: jomaroca@mat.upc.es
<http://www-mat.upc.es/~jomaroca>

febrer de 2001

Índex

Introducció	3
1 Compresió	5
1.1 Introducció	5
1.2 Mostreig	6
1.3 Compresió	8
1.3.1 Compresió sense pèrdues	8
1.3.2 Compresió amb bases ortonormals	10
2 El wavelet de Haar.	
Anàlisi de multiresolució	11
2.1 Espais de resolució	12
2.2 Wavelets	12
2.3 Restricció a $[0, 1]$	14
2.4 Filtres	14
2.5 Productes escalars	15
2.6 Bancs de filtres. Anàlisi de senyals	16
3 Anàlisi de multiresolució	19
3.1 Anàlisi de multiresolució (MRA)	19
3.1.1 Wavelets	20
3.1.2 Bases	20
3.1.3 Alguns resultats	21
3.2 Formulació en el domini freqüencial	22
3.3 Banc de filtres. Anàlisi	23
3.3.1 Anàlisi a partir del mostreig	24
3.4 Anàlisi bidimensional	24
4 Wavelets de Daubechies	26
4.1 Resultats bàsics i notació	26
4.2 Característiques dels wavelets	27
4.3 Els wavelets de Daubechies	28
5 Spline Wavelets	30
5.1 m -splines	30
5.2 Funció d'escala	31
5.3 Filtres	32
5.4 Primers casos	33

5.5	Wavelets	33
5.6	Propietats	33
6	Subdivisió Recursiva	34
6.1	Subdivisió uniforme	34
6.1.1	Filtres típics	35
6.1.2	Interpolació	35
6.1.3	Efectes de frontera	35
6.1.4	Corbes en el pla	36
6.1.5	Aplicacions	36
6.2	Iteracions amb l'equació d'escala	36
6.2.1	Condicció inicial	36
6.2.2	Procediment	37
6.2.3	Procediment alternatiu	37
7	El principi d'incertesa temps-freqüència	38
7.1	Introducció	38
7.2	Representació de magnituds per operadors	38
7.3	La representació de freqüències	39
7.4	El principi d'incertesa temps-freqüència	40
7.5	Principi d'incertesa general	41
7.6	El principi d'incertesa en física quàntica	41
7.7	Interpretació	42
A	Notació i alguns resultats bàsics	43
A.1	Espais de Hilbert	43
A.2	Subespais de un espai de Hilbert	45

Introducció

Aquestes notes contenen una descripció autocontinguda de diversos tònics de la teoria dels wavelets. El capítol de compressió és independent de la resta i presenta de manera resumida els conceptes i tècniques habituals de compressió. El tema principal es l'anàlisi de multiresolució que es descriu paral·lelament a l'exemple més senzill que és el wavelet de Haar. El tema següent és el nucli d'aquestes notes i conté els resultats generals. A partir d'aquest tema es descriuen els wavelets de Daubechies i els fets amb splines. Aquests dos temes són independents entre si. El capítol de divisió recursiva descriu tècniques que s'utilitzen en gràfics computeritzats i que estan relacionades amb els wavelets. Finalment hi ha un capítol que explica el principi d'incertesa. Aquest tema no té relació directa amb la resta dels temes i es pot estudiar primer com a “precalentament” sobre espais de Hilbert.

Capítol 1

Compressió

1.1 Introducció

L'objectiu de la compressió és reduir el tamany en nombre de bits de la representació de diferents tipus de senyal. La compressió és necessària per economia i eficiència en l'emmagatzematge, manipulació i transmissió d'informació.

L'element bàsic que considerem és un *senyal digital* que ve donat per una seqüència de valors cadascun d'ells d'un tamany fixat en bits. Aquest senyal representa generalment un fragment de realitat que admet una representació fidel amb funcions reals de variable real.

Exemples:

- So. Ve donat per la funció $f(t)$, pressió de l'aire en un punt donat en l'instant t . La seva representació digital serien el conjunt de valors x_n que representen aproximadament els nombres reals $f(nT)$ on T és un valor petit prefixat.
- Imatge. És una distribució continua de valors de lluminositat i color generalment sobre un rectangle. La representació digital considera una xarxa regular de punts sobre aquest rectangle (pixels) i assigna a cada pixel un valor promig del que es troba al seu voltant. Hi han diferents tipus segons l'aplicació que es consideri.
 - Blanc i negre. A cada pixel hi ha un bit. Es diuen imatges bitonals. S'aplica a documents.
 - Escala de grisos. A cada pixel hi ha una intensitat de gris. Per documents és suficient entre 4 i 7 bits. Per fotos calen 8 bits (256 nivells de gris) per tenir gradacions prou fines (si no, l'ull percep línies amb transicions abruptes).
 - Color. A cada pixel hi posem la lluminància (intensitat lluminosa) i la crominància (color). Es pot donar la lluminància Y i dos valors de crominància c_B, c_R , o alternativament tres crominàncies c_R, c_G, c_B que són les components aditives de vermell, verd i blau. Cada crominància es representa amb 8 bits (1 byte) i es parla, per tant, de color de 24 bits ($2^{24} = 16.7$ milions de colors).
- Video. És una seqüència temporal d'imatges. Calen més de 24 imatges per segon (fps) i per cada imatge no es requereix tanta qualitat com per imatges fixes.

Els procediments de representació i processat dels anteriors tipus de senyal poden variar considerablement segons l'aplicació que es requereixi. Pensem en telefonia, música, documentació,

TV, imatges mèdiques, meteorologia, sistemes de vigilància, observació astronòmica, radar, ... Algunes aplicacions d'ús molt extès porten a l'establiment d'estàndars de codificació i compressió. La música que es comercialitza en CD, els formats JPEG o GIF per imatges o MPEG per video, per exemple. En aquest cas hi han factors de tipus industrial i comercial que afecten la seva elecció i renovació. Altres aplicacions poden ser molt més específiques. Per exemple, un sistema que processa radiografies mèdiques per detectar malalties.

Diem S al tamany en bits d'un senyal digital. Els senyals d'imatge porten associats valors elevats de S ja que són bidimensionals i es requereix una bona resolució per tenir resultats visualment acceptables. Una imatge en color en VGA (640×480 pixels) a 3 bytes per pixel té $S = 1\text{Mb}$ ($1\text{Mb} = 10^6$ bytes). En televisió d'alta definició (HDTV) es requereix una resolució de 1280×720 pixels i 60 fps el que obligaria a transmetre uns 170 Mb/s. Amb procediments de compressió s'aspira a reduir aquest valor per un factor 50. Els arxius de l'FBI contenen més de 30 milions d'empremtes digitals de criminals. Cada una és un fixer de 10 Mb amb la imatge en escala de grisos. Qualsevol millora en les tècniques de compressió permet un nombre més alt de comparacions i porta a la solució d'antics crims.

1.2 Mostreig

Tot i que les tècniques de compressió parteixen del senyal digital, és convenient analitzar com s'arribat a obtenir aquest. Considerem senyals unidimensionals però l'anàlisi de senyals de més dimensions es fa de manera idèntica.

El senyal original és $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ on f és una funció de $L^2(\mathbb{R})$. El *mostreig* (sampling) correspon a fixar una seqüència numerable d'instants t_n i el senyal mostrejat és el conjunt de valors $f(t_n)$. La *quantització* passa els valors reals $f(t_n)$ a x_n , aproximació amb un cert nombre de bits. El senyal digital el constitueixen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Els valors t_n s'acostumen a triar amb un espaiat uniforme. Es fixa un interval de mostreig T i es fa $t_n = nT$. El senyal mostrejat és $\{f(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Teorema del mostreig (Shannon, Whitaker)

Si f és de banda prou limitada es pot reconstruir exactament el senyal original a partir del mostreig.

Més específicament:

Si $\text{suport}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ llavors $f(t) = \sum_n f(nT) \text{sinc}(\frac{\pi}{T}(t - nT))$.

DEM: El resultat del mostreig el podem considerar a través de la funció $f_d(t) = \sum_n f(nT)\delta(t - nT)$. Recordem les propietats $f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$ i $\hat{f}(\omega) * \delta(\omega - \alpha) = \hat{f}(\omega - \alpha)$. Llavors $f_d(t) = f(t) \sum_n \delta(t - nT)$ i

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \sum_n e^{-jnT\omega} = \frac{1}{T} \hat{f}(\omega) * \sum_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}) = \frac{1}{T} \sum_k \hat{f}(\omega - \frac{2\pi k}{T}).$$

(s'ha utilitzat la Fórmula de Poisson.) Si $\text{suport}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ resulta que $\hat{f}_d(\omega)$ és una extensió periòdica de $\hat{f}(\omega)$ i podem posar

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{T} \hat{f}_d(\omega) 1_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}(\omega).$$

Invertint

$$f(t) = f_d(t) * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \sum_n f(nT)\delta(t - nT) * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \sum_n f(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) \clubsuit$$

Denotem $h_T(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$. Hem vist que si f és de banda prou limitada $f = f_d * h_T$. Notem que la convolució amb h_T no és més que un filtrat de altes freqüències. Si f conté altes freqüències el mostreig pot ser poc significatiu ja que f presenta variacions altes a curtes distàncies. Es pot millorar el mostreig amb la següent consideració.

Quina és la funció \bar{f} de banda limitada a $[-\pi/T, \pi/T]$ que millor aproxima f ?

Cal minimitzar

$$\|f - \bar{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f} - \hat{\bar{f}}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| > \frac{\pi}{T}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |\hat{f}(\omega) - \hat{\bar{f}}(\omega)|^2 d\omega.$$

El primer terme està fixat i el segon és mínim si $\hat{\bar{f}}(\omega) = 1_{[-\pi/T, \pi/T]} \hat{f}(\omega)$ d'on tenim

$$\bar{f}(t) = f(t) * \frac{1}{T} h_T(t)$$

El procediment és, llavors, fer un filtratge d'altres freqüències a f per obtenir \bar{f} i mostrejar \bar{f} .

Interpretació com a espais d'aproximació

Sigui U_T el subespai de $L^2(\mathbb{R})$ de les funcions de banda limitada a $[-\pi/T, \pi/T]$. Ja s'ha vist que $\{h_T(t - nT)\}_n$ n'és una base ja que si $f \in U_T$

$$f(t) = \sum_n f(nT) h_T(t - nT).$$

A més la base és ortogonal

$$(h_T(t - mT), h_T(t - nT)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T e^{jmT\omega} T e^{-jnT\omega} d\omega = T^2 \delta_{n,m}$$

on s'ha utilitzat Parseval. Llavors podem interpretar el filtratge com una projecció ortogonal $\bar{f} = P_{U_T} f$.

Significat dels coeficients del senyal digital

Donat un senyal digital $\{x_n\}$, els nombres x_n corresponen al procés de mostreig i quantització descrit anteriorment. En la realitat les coses poden ser més complicades. El senyal digital pot estar lligat a un procés de mesura que no té una expressió matemàtica totalment definida. Per exemple, una foto digital s'obté de l'acció de la llum provinent de la "realitat" sobre un sensor (CCD) que conté un element de captació per cada pixel de la imatge. En aquest cas el que mesurem no són valors exactament puntuals $x_n = f(t_n)$ sino promitjos localitzats al voltant dels punts t_n

$$x_n = \int_{-\infty}^{\infty} q(t - t_n) f(t) dt.$$

on $q(t)$ és una funció localitzada al voltant de $t = 0$. En una situació ideal podem considerar $q(t) = \delta(t)$ però en general és admissible prendre altres funcions.

És important el fet que si $q(t)$ és qualsevol funció que estigui prou localitzada els coeficients x_n donen una representació prou fidel del senyal. Això ens dóna llibertat per interpretar els valors mesurats experimentalment x_n com l'expansió del senyal en una base de la nostra elecció.

Quan es treballa en bases de wavelets el primer nivell d'aproximació consisteix en interpretar el senyal digital com una expansió en wavelets ja que la base és localitzada.

1.3 Compressió

Considerem un senyal digital de tamany S . Es poden considerar diferents representacions d'aquest senyal i aquestes tindran tamany diferents. El problema és arribar a tamany petits per un tipus de senyal donat. Distingim primer:

- Compressió sense pèrdues (*lossless*). El senyal comprimit ha de permetre reconstruir exactament el senyal original. Això limita la quantitat de compressió que es pot fer però és necessari si l'objecte que tractem és un text, un programa executable d'ordinador, informació ben estructurada, ...
- Compressió amb pèrdues (*lossy*). Admetem la pèrdua d'informació que es traduirà en distorsió en el senyal reconstruït. L'objectiu és arribar a un equilibri entre el grau de compressió i el nivell de distorsió. Les imatges fotogràfiques o els sons permeten aquest tipus de compressió.

La compressió sense pèrdues és rellevant en qualsevol cas ja que un procediment complet de compressió amb pèrdues pot incorporar diferents esquemes de compressió. Per exemple, podem tenir pèrdues si expandim en una base i despreciem alguns coeficients. L'enumeració de quins coeficients hem de tenir en compte s'haurà de comprimir amb un esquema sense pèrdues perquè l'omissió d'un sol d'aquests coeficients tindria efectes grans sobre el resultat final.

Els tres factors que s'han de considerar són:

Eficiència. Es mesura amb la raó de compressió R . Denotem $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, senyal original i X_c senyal comprimit

$$R = \frac{S(\text{senyal comprimit})}{S(\text{senyal original})}$$

Distorsió. Pèrdua d'informació resultant. Es pot mesurar amb l'error en mitjana quadràtica:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \|X_c - X\|^2,$$

la relació senyal-soroll:

$$\text{SNR} = \frac{10}{\log 10} \log \frac{\|X\|^2}{\|X_c - X\|^2},$$

o la relació senyal-soroll *peak-to-peak*:

$$\text{SNR}_p = \frac{10}{\log 10} \log \frac{x_p^2}{\text{MSE}},$$

on x_p és la màxima diferència entre els valors en X_c i X .

Aquestes mesures de la distorsió són d'ús general. Les peculiaritats de la percepció sensorial porten a mesures més específiques en tipus concrets de senyal.

Complexitat. És el nombre d'operacions necessàries per comprimir i descomprimir. Per aplicacions en temps reals cal que la complexitat sigui baixa.

1.3.1 Compressió sense pèrdues

El senyal o missatge ve donat per una seqüència de símbols d'un cert alfabet. Una variable aleatòria X modela l'aparició d'aquests símbols. Els seus possibles valors són x_1, x_2, \dots, x_K . Cada símbol té associada una paraula binària w_k de longitud l_k i el missatge és la seqüència d'aquestes paraules. Hi ha la possibilitat de triar $l_k = \lceil \log_2 K \rceil$ per tot k . Per exemple, si $K = 6$, $\lceil \log_2 6 \rceil = 3$. Amb 3

bits tenim 8 valors possibles que permeten acomodar els 6 símbols. Hi han eleccions millors si tenim en compte l'estadística d'aparició dels símbols. Si $p_k = P(X = x_k)$ el tamany promig ve donat per $R_X = \sum_{k=1}^K l_k p_k$. L'esperança de la longitud d'un missatge de L símbols és LR_X . L'objectiu és minimitzar R_X .

Perque el missatge es pugui llegir sense ambigüitats cal que cap codi sigui prefix de cap altre. Si tenim els símbols $\{0, 10, 110, 101\}$ el missatge 11001010 admet les lectures 110-0-101-0 i 110-0-10-10. El problema és que 10 és prefix de 101. Si això no passa diem que tenim un codi prefix. Per exemple, $\{00, 01, 100, 101, 110, 111\}$. Cada codi prefix es pot representar amb un arbre binari de K fulles on cada node conte un símbol o dues branques.

L'entropia de la font es defineix

$$H(X) = - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 p_k.$$

Teorema (Shannon)

Tot codi prefix verifica $R_X \geq H(X)$. A més existeix algun codi tal que $R_X \leq H(X) + 1$.

DEM: S'utilitza la desigualtat de Kraft que diu que per tot codi prefix

$$\sum_{k=1}^K 2^{-l_k} \leq 1. \tag{1.1}$$

Inversament, un conjunt de valors $\{l_k\}$ que verifiqui la desigualtat correspon a algun codi prefix. Per demostrar-la denotem el nombre de nivells de l'arbre $m = \max\{l_1, \dots, l_K\}$. L'expansió completa de l'arbre tindria 2^m fulles. Si expandim cada node on hi ha un símbol de longitud l_k apareixen 2^{m-l_k} fulles en l'últim nivell. Així ha de ser $\sum_k 2^{m-l_k} \leq 2^m$ que equival a la desigualtat anterior. La construcció d'un codi a partir de les l_k es fa amb un raonament similar.

Ara minimitzem R_X sotmes al lligam (1.1) amb multiplicadors de lagrange i trobem la solució $l_k = -\log_2 p_k$. Per aquesta solució $R_X = H(X)$ però en general aquests l_k no seran enters i només podem concloure $R_X \geq H(X)$.

El codi de Shannon correspon a $l_k = \lceil -\log_2 p_k \rceil$. En aquest cas $R_X = \sum_k p_k l_k \leq \sum_k p_k (-\log_2 p_k + 1) = H(X) + 1$. ♣

Codi de Huffman

El codi de Huffman permet acostar-se més al valor $H(X)$. Si hi han molts símbols amb distribució aproximadament uniforme, aquest mètode és molt superior al de Shannon.

El procediment consisteix en ordenar les probabilitats en ordre decreixent, substituir els dos últims símbols per un amb probabilitat igual a la suma d'aquests dos. Això es va repetint fins que queden dos valors. Per construir l'arbre posem dues branques per cada dos símbols que hem agrupat.

Exemple

Considerem $K = 6$ i probabilitats 0.4, 0.2, 0.15, 0.1, 0.1, 0.05. L'entropia val 2.284. Agafant totes les longituds iguals tenim $l_k = 3$ i, per tant, $R_X = 3$. El codi de Shannon dóna longituds 2, 3, 3, 4, 4, 5 i $R_X = 2.9$. El procediment de Huffman:

0.4 0.2 0.15 0.1 0.1(0) 0.05(1) [0.15]
 0.4 0.2 0.15 0.15(0) 0.1(1) [0.25]
 0.4 0.25 0.2(0) 0.15(1) [0.35]

$$\frac{0.4 \ 0.35(\mathbf{0}) \ 0.25(\mathbf{1})}{0.6(\mathbf{0}) \ 0.4(\mathbf{1})} [0.6]$$

dóna els símbols 1, 000, 001, 011, 0100, 0101 i $R_X = 2.35$.

Altres codis són els de **Ziv-Lemple** en que el missatge és codifica amb referències a un diccionari que es pot variar dinàmicament. Aquests codis s'utilitzen en els procediments de compressió estàndar de UNIX i estan suportats pel format de representació d'imatges TIFF.

En la **codificació aritmètica** al missatge se li associa un nombre real entre 0 i 1. El procediment dóna de fet un interval començant amb [0,1]. A l'afegir cada símbol es parteix l'interval present en subinterval de longitud proporcional a les probabilitats dels símbols i es tria el subinterval corresponent. Aquest sistema és sensible a les limitacions en precisió numèrica de les màquines i als errors en la transmissió. Un sol bit pot corrompre tot el missatge. Això obliga a complicar l'esquema incorporant **codis correctors**.

1.3.2 Compressió amb bases ortonormals

Considerem el senyal representat per la seqüència de n valors reals $Y[n]$, $0 \leq n < N$. Els **codis de transformació** apliquen transformacions lineals al vector Y i prossegueixen amb la codificació dels resultats obtinguts. Un procediment habitual és l'expansió en una base ortonormal $\{g_n\}$, $0 \leq n < N$

$$Y = \sum_n A[n]g_n, \quad A[n] = (Y, g_n) = \sum_m Y[m]g_n[m]^*$$

El senyal Y s'acostuma a modelar amb un procés aleatori (a temps discret en aquest cas). Suposem que aquest procés té valor mitjà 0 ($E[Y[n]] = 0$) i funció d'autocorrelació $K[m, n] = E[Y[m]Y[n]^*]$. Cal tenir en compte que en alguns casos com el de les imatges no hi han processos senzills per fer aquest modelat.

Per tenir codis finits quantitzem les variables $A[n]$ aproximant-les per $\tilde{A}[n]$ que pot prendre un conjunt finit de valors. Si les variables $A[n]$ són bastant interdependents es poden quantitzar amb més compressió si es consideren en conjunt. Parlem de *quantització vectorial*. Com aquesta implica més complexitat de càlcul és més comú la *quantització escalar* que opera sobre cada coeficient per separat. Si les variables $A[n]$ són bastant independents l'èfficiència superior de la quantització vectorial és poc rellevant.

El senyal reconstruït és $\tilde{Y} = \sum_n \tilde{A}[n]g_n$ i la distorsió $D = E[\|Y - \tilde{Y}\|^2] = \sum_n E[|A[n] - \tilde{A}[n]|^2]$.

El procés global de compressió és:

- Obtenció del coeficients $A[n]$.
- Quantització a $\tilde{A}[n]$.
- Codificació dels $\tilde{A}[n]$ amb codis de Huffman o aritmètics.

Si X és una variable aleatòria contínua, la quantització escalar correspon a una certa funció que dóna $\tilde{X} = Q(X)$ i que pren un conjunt finit de valors. La distorsió es calcula $D = E[(X - \tilde{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - Q(x))f_X(x)dx$. La mínima distorsió sol anar associada a quantitzadors uniformes (que prenen valors equiespaiats).

L'elecció de la base juga un paper important. La **base de Karhunen-Loève** és aquella que diagonalitza la matriu d'autocorrelació $K[m, n]$. En el cas d'un procés gaussià és la base que minimitza la distorsió. En casos més generals aquesta base no és òptima i resulta difícil de calcular.

Capítol 2

El wavelet de Haar. Anàlisi de multiresolució

El wavelet de Haar és l'exemple més senzill de wavelet. Malgrat que en les aplicacions no és massa útil degut a la seva poca regularitat, aquest exemple presenta les característiques comunes a tots els anàlisis de multiresolució. El wavelet de Haar es pot considerar també el cas més simple dins els wavelets de Daubechies i els wavelets fets amb splines.

Treballem en l'espai $L^2(\mathbb{R})$. Considerem el subespai

$$V_0 = \{\text{funcions constants en } (n, n+1) \forall n \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.1)$$

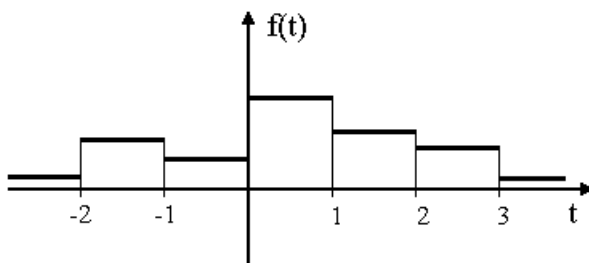


Fig. 1: Un element de V_0 .

La funció $\varphi(t) = 1_{[0,1]}$ ens dóna la base de V_0 $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Aquesta base és ortonormal

$$(\varphi(t-n), \varphi(t-m)) = \delta_{n,m}.$$

Si $f \in V_0$ llavors $f(t) = \sum_n c_n \varphi(t-n)$ amb $c_n = (f, \varphi(t-n)) = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

Per funcions arbitràries les operacions anteriors donen la projecció ortogonal sobre l'espai V_0 .

$$P_{V_0} f(t) = \sum_n c_n \varphi(t-n).$$

En les unitats de temps adequades podem considerar els coeficients c_n com el resultat de fer un mostreig de la funció f . Notem també que

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.2)$$

Operador de dilatació

Si $a > 0$ definim l'operador $\lambda_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ a través de $\lambda_a f(t) = f(a^{-1}t)$. Té les propietats:

- $(\lambda_a f, \lambda_a g) = a(f, g)$,
- $\|\lambda_a f\| = a^{1/2}\|f\|$,
- $\widehat{\lambda_a f}(\omega) = a\hat{f}(a\omega)$.

Notem que si f és una funció unitaria $a^{-1/2}\lambda_a f$ també ho és.

2.1 Espais de resolució

Definim els subespais $V_j = \lambda_{2^{-j}}V_0$ per $j \in \mathbb{Z}$. V_j és l'espai de funcions constants en els intervals $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. És immediat veure que

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \quad (2.3)$$

Donada $f \in L^2(\mathbb{R})$, les projeccions $P_{V_j}f$ són mostreigs de f amb diferents nivells de resolució. Com més alt és el valor de j més detalls de la funció podem representar.

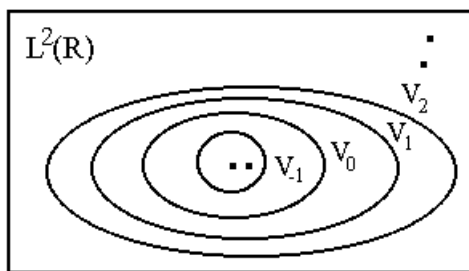


Fig. 2: Multiresolució.

Una base ortonormal de V_j és $\{2^{j/2}\varphi(2^j t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Es veu immediatament que $\varphi(2^j t - n) = 1_{[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]}$. Per valors diferents de j aquestes funcions *no* són ortogonals. Es pot demostrar que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ llavors

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_{V_j} f = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} P_{V_j} f = f. \quad (2.4)$$

Ho simbolitzem dient que, per $j \rightarrow \infty$, $V_{-j} \rightarrow \{0\}$ i $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$.

2.2 Wavelets

Podem considerar a partir de qualsevol valor fixat J

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J + V_{J+1} + V_{J+2} + \dots$$

encara que la suma no és ortogonal per no ser-ho els subespais V_j . Podem arreglar això introduint els espais W_j definits

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (2.5)$$

W_j és el complement ortogonal de V_j dins de V_{j+1} .

Si considerem el cas particular $V_1 = V_0 \oplus W_0$ i apliquem l'operador de dilatació $\lambda_{2^{-j}}$ als dos costats obtenim (2.5) i veiem que $W_j = \lambda_{2^{-j}}W_0$. Així només cal determinar W_0 .

Com $V_0 \subset V_1$ tenim que la *funció pare* $\varphi(t) \in V_1$. Llavors podem expandir $\varphi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t-n)$. Els coeficients valen

$$h_n = (\sqrt{2}\varphi(2t-n), \varphi(t)) = \sqrt{2} \int_{n/2}^{(n+1)/2} \varphi(t) dt = \sqrt{2} \frac{\delta_{n,0} + \delta_{n,1}}{2}$$

i, per tant

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \quad (2.6)$$

relació que és evident a partir de la gràfica de $\varphi(t)$. Per calcular W_0 busquem els elements de V_1 ortogonals als de V_0 . La condició és que per tot m

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_n d_n \sqrt{2} \varphi(2t-n), \varphi(t-m) \right) = \left(\sum_n d_n \sqrt{2} \varphi(2t-(n+2m)), \varphi(t) \right) \\ &= \sum_n d_n \sqrt{2} \frac{\delta_{n-2m,0} + \delta_{n-2m,1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (d_{2m} + d_{2m+1}). \end{aligned}$$

Així tenim que $d_0 + d_1 = 0$, $d_2 + d_3 = 0$, etc. Una base de W_0 s'obté definint la *funció mare*

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \quad (2.7)$$

i prenent $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Una base ortonormal de W_j és $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ on

$$\psi_{j,n}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - n). \quad (2.8)$$

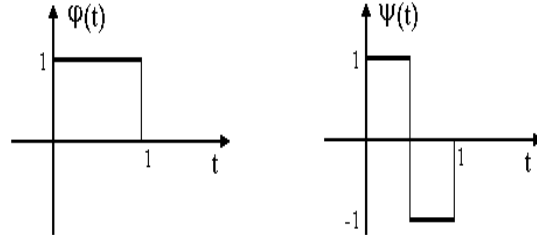


Fig. 3: Funció d'escala $\varphi(t)$ i wavelet $\psi(t)$.

Donada la descomposició ortogonal

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

resulta que $\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Els *wavelets* són els elements d'aquesta base. Tota la informació sobre aquests wavelets es troba en la funció mare $\psi(t)$ ja que la resta s'obté per dilatacions i translacions. La funció pare $\varphi(t)$ es denomina també *funció d'escala*¹.

¹Si bé el significat de la funció d'escala és estàndar, les funcions pare i mare es troben, a vegades, intercanviades en la literatura. La paraula anglesa wavelet deriva de la francesa *ondelette* i vindria a significar “ona petita” o “ona localitzada”. La interpretació del wavelet com a ona ve del fet general que $\int \psi(t) dt = 0$ que implica que la funció ha de tenir parts positives i parts negatives. Els anglofòbics poden utilitzar el terme *oneta* en lloc de *wavelet*

Si es vol fer l'anàlisi a partir d'una resolució bàsica es pot considerar també

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j.$$

2.3 Restricció a $[0, 1]$

Si volem treballar en $L^2([0, 1])$ podem repetir tot l'anàlisi anterior eliminant les translacions que ens treuen fora de l'interval $[0, 1]$. Ara només tenim espais amb $j \geq 0$ i V_0 és un espai unidimensional format per les funcions constants. La base de V_j és $\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - n)\}_{0 \leq n < 2^j}$ i conté 2^j elements. La base ortonormal completa de $L^2([0, 1])$ en termes de la funció 1 i els wavelets és $\{1, \psi_{j,n}(t)\}_{j \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 2^j}$.

L'expansió de Haar (Alfred Haar, 1909) és, per $f \in L^2([0, 1])$

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2^j-1} c_{jn} \psi_{j,n}(t). \quad (2.9)$$

on

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 f(t) dt, \\ c_{jn} &= (f, \psi_{j,n}) = 2^{\frac{j}{2}} \int_0^1 f(t) \psi(2^j t - n) dt \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \int_0^1 f(t) (\varphi(2^{j+1} t - 2n) - \varphi(2^{j+1} t - 2n - 1)) dt \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_{2^{-j}n}^{2^{-j}(n+\frac{1}{2})} f(t) dt - \int_{2^{-j}(n+\frac{1}{2})}^{2^{-j}(n+1)} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Exercici: trobar l'expansió de Haar per la funció $f(t) = t, 0 < t < 1$. Comprobar la igualtat de Parseval $\|f\|^2 = |c_0|^2 + \sum_{j,n} |c_{jn}|^2$. Amb quina velocitat decauen els coeficients? Compareu amb Fourier.

2.4 Filtres

Ja hem vist que la funció d'escala i el wavelet verifiquen les equacions (2.6) i (2.7)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(2t) + \varphi(2t - 1), \\ \psi(t) &= \varphi(2t) - \varphi(2t - 1). \end{aligned}$$

Aquestes equacions expressen el fet que $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ són elements de V_1 i que aquest espai s'obté dilatant les funcions de V_0 . En general escrivim

$$\varphi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad (2.10)$$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2} \varphi(2t - n). \quad (2.11)$$

En el cas de Haar els únics coeficients no nuls són $h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = 1/\sqrt{2}$. Si transformem per Fourier els dos costats de (2.10) i (2.11) trobem

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.12)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.13)$$

Les seqüències $\{h_n\}$ i $\{g_n\}$ pertanyen a l^2 i es poden considerar els coeficients de Fourier dels filtres $H(\omega)$ i $G(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\omega}, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\omega}. \quad (2.14)$$

Així

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.15)$$

En el nostre cas

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2}, \quad G(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{2}. \quad (2.16)$$

Notem que la primera equació en (2.15) és una relació recursiva per φ . Com $\hat{\varphi}(0) = 1$ (veure (2.2)) tenim la solució

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega).$$

Exercici: Utilitzeu l'anterior fórmula junt amb el resultat ja conegut (2.2) per demostrar que

$$\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \cos\left(\frac{\omega}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega}{8}\right) \cos\left(\frac{\omega}{16}\right) \cdots$$

Ara demostreu que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots$$

2.5 Productes escalars

A partir de la funció d'escala $\varphi(t)$ i del wavelet $\psi(t)$ hem construït les funcions

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n), \quad \psi_{j,n}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n).$$

Els productes escalars més bàsics són

$$(\psi_{j,m}, \psi_{k,n}) = \delta_{j,k} \delta_{m,n}, \quad (2.17)$$

$$(\varphi_{j,m}, \varphi_{j,n}) = \delta_{m,n}, \quad (2.18)$$

$$(\varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,n}) = h_{m-2n}^*, \quad (2.19)$$

$$(\varphi_{j+1,m}, \psi_{j,n}) = g_{m-2n}^*. \quad (2.20)$$

DEM: (2.17) indica que la base de wavelets és ortonormal i (2.18) que $\{\varphi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de V_j , resultats que ja s'han vist.

$$\begin{aligned} (\varphi_{j+1,m}, \varphi_{j,n}) &= (2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t - m), 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n)) = 2^{j+\frac{1}{2}} \int dt \varphi(2^{j+1}t - m) \varphi^*(2^j t - n) \\ &= \sqrt{2} \int ds \varphi(2s - m) \varphi^*(s - n) = \sqrt{2} \int ds \varphi(2s - m) \sum_p h_p^* \sqrt{2} \varphi^*(2s - 2n - p) \\ &= \sum_p h_p^* (\varphi_{1,m}, \varphi_{1,2n+p}) = \sum_p h_p^* \delta_{m,2n+p} = h_{m-2n}^*. \end{aligned}$$

S'ha utilitzat el canvi $s = 2^j t$ i (2.10). La demostració de (2.20) és idèntica a aquesta fent servir (2.11). ♣

2.6 Bancs de filtres. Anàlisi de senyals

Considerem l'anàlisi de senyals sobre l'interval unitat. El senyal original correspon a la funció $f \in L^2([0, 1])$. Dividim l'interval $[0, 1]$ en 2^J subintervalls i mostregem f a aquesta resolució. El resultat del mostreig són els coeficients $a_J[n], 0 \leq n < 2^J$. Aquests coeficients provindrien en la pràctica d'un procés de mesura. Com estem treballant amb bases de funcions localitzades en el temps podem interpretar aquests coeficients com els que donen la projecció de f sobre V_J . Posem $f_J = P_{V_J} f$ i tenim

$$f_J(t) = \sum_{n=0}^{2^J-1} a_J[n] \varphi_{J,n}(t).$$

La descomposició ² $V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$ ens dóna $f_J = f_{J-1} + g_{J-1}$ on

$$\begin{aligned} f_{J-1} &= P_{V_{J-1}} f_J = \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} a_{J-1}[n] \varphi_{J-1,n}(t), \\ g_{J-1} &= P_{W_{J-1}} f_J = \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} b_{J-1}[n] \psi_{J-1,n}(t). \end{aligned}$$

El procés es pot continuar descomposant f_{J-1} . En cada pas s'obté un terme d'expansió en wavelets representat en els coeficients $b_K[n]$ i una resta de baixa freqüència $a_K[n]$ donada per la última descomposició. Si fem R passos obtindrem

$$f_J = f_{J-R} + g_{J-R} + \cdots + g_{J-2} + g_{J-1}.$$

²Aquesta descomposició s'interpreta: una representació a resolució J equival a una representació a resolució menor $(J-1)$ més els detalls que es perden al reduir la resolució. A vegades, els espais de wavelets s'anomenen espais de detall.

En termes dels coeficients, partim del senyal $a_J[n]$ i el seu anàlisi ens dóna

$$a_{J-R}[n], b_{J-R}[n], \dots, b_{J-2}[n], b_{J-1}[n]. \quad (2.21)$$

És fàcil veure que el nombre total de coeficients resultants de l'anàlisi és 2^J .

Per calcular els coeficients, en cada pas obtenim $a_{K-1}[n], b_{K-1}[n]$ a partir de $a_K[n]$. En el procés només cal guardar els indicats en (2.21).

Definim els filtres discrets

$$\bar{h}[n] = h_{-n}^*, \quad \bar{g}[n] = g_{-n}^*. \quad (2.22)$$

Llavors

$$a_{K-1}[n] = (a_K * \bar{h})[2n], \quad b_{K-1}[n] = (a_K * \bar{g})[2n]. \quad (2.23)$$

(La convolució discreta de dues seqüències $c[n], d[n]$ és $(c * d)[n] = \sum_k c[k]d[n-k]$).

És important notar que la forma específica de la funció wavelet no apareix en aquest anàlisi. Només fem servir els filtres h_n i g_n . Quan volem construir un tipus particular de wavelet el que fem és buscar filtres adequats.

La reconstrucció és

$$a_{K+1}[n] = (\tilde{a}_K * h)[n] + (\tilde{b}_K * g)[n]. \quad (2.24)$$

on $\tilde{c}[2n+1] = 0, \tilde{c}[2n] = c[n]$.

DEM: Partim de $f_{K-1} = \sum_n a_{K-1}[n]\varphi_{K-1,n}$. Com $f_{K-1} = P_{V_{K-1}}f_K$ tenim que

$$\begin{aligned} a_{K-1}[n] &= (f_K, \varphi_{K-1,n}) = \left(\sum_m a_K[m]\varphi_{K,m}, \varphi_{K-1,n} \right) \\ &= \sum_m a_K[m](\varphi_{K,m}, \varphi_{K-1,n}) = \sum_m a_K[m]\bar{h}[2n-m] \end{aligned}$$

que és la primera igualtat de (2.23). Amb $g_{K-1} = \sum_n b_{K-1}[n]\psi_{K-1,n}$ i $g_{K-1} = P_{W_{K-1}}f_K$

$$\begin{aligned} b_{K-1}[n] &= (f_K, \psi_{K-1,n}) = \left(\sum_m a_K[m]\varphi_{K,m}, \psi_{K-1,n} \right) \\ &= \sum_m a_K[m](\varphi_{K,m}, \psi_{K-1,n}) = \sum_m a_K[m]\bar{g}[2n-m] \end{aligned}$$

que és la segona igualtat. Per demostrar (2.24) hem de calcular $a_{K+1}[n] = (f_{K+1}, \varphi_{K+1,n})$. De $V_{K+1} = V_K \oplus W_K$ treiem la base de V_{K+1} $\{\varphi_{K,m}, \psi_{K,n}\}_n$ d'on

$$f_{K+1} = \sum_n a_K[n]\varphi_{K,n} + \sum_n b_K[n]\psi_{K,n}.$$

Així

$$\begin{aligned} a_{K+1}[n] &= \left(\sum_n a_K[n]\varphi_{K,n} + \sum_n b_K[n]\psi_{K,n}, \varphi_{K+1,n} \right) \\ &= \sum_n a_K[n](\varphi_{K,n}, \varphi_{K+1,n}) + \sum_n b_K[n](\psi_{K,n}, \varphi_{K+1,n}) \end{aligned}$$

$$= \sum_n a_K[n]h_{n-2m} + \sum_n b_K[n]g_{n-2m}. \clubsuit$$

Aquests resultats valen per qualsevol wavelet unidimensional. En el cas de Haar els filtres només tenen dos elements i les fórmules anteriors són bastant senzilles.

$$a_{K-1}[n] = \frac{a_K[2n] + a_K[2n+1]}{\sqrt{2}}$$

$$b_{K-1}[n] = \frac{a_K[2n] - a_K[2n+1]}{\sqrt{2}}$$

$$a_{K+1}[n] = \frac{a_K[\frac{n}{2}] + a_K[\frac{n-1}{2}]}{\sqrt{2}} + \frac{b_K[\frac{n}{2}] - b_K[\frac{n-1}{2}]}{\sqrt{2}}$$

(si apareix un terme amb índex no enter posem 0.)

Exemple: Prenem $J = 2$ i el mostreig dóna un resultat genèric x_0, x_1, x_2, x_3 . Trobem

$$a_1[0] = \frac{x_0 + x_1}{\sqrt{2}}, \quad a_1[1] = \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{2}}.$$

$$b_1[0] = \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{2}}, \quad b_1[1] = \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}}.$$

$$a_0[0] = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2}.$$

$$b_0[0] = \frac{x_0 + x_1 - x_2 - x_3}{2}.$$

El resultat de l'anàlisi és

$$a_0[0] = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{2}, b_0[0] = \frac{x_0 + x_1 - x_2 - x_3}{2}, b_1[0] = \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{2}}, b_1[1] = \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{2}}.$$

Exercici: Veure que el desenvolupament anterior prenent $J = 1$ i fent un pas coincideix amb la transformada de Fourier discreta.

Exercici: Implementar en MAPLE rutines que calculin la transformació de wavelet. Fer un programa que parteixi d'una funció i un valor J i faci una gràfica de la funció reconstruïda només amb els M majors coeficients.

Capítol 3

Anàlisi de multiresolució

La base de Haar conté tots els ingredients d'una anàlisi on controlem l'escala i la posició. L'objectiu és estendre aquesta estructura a bases on els elements tinguin bones propietats en quant a nombre de derivades admisibles o nombre de moments nuls.

Aquesta estructura general es diu *anàlisi de multiresolució* (MRA). A continuació la descrivim veient les diferents perspectives des de les que es pot abordar. Els objectes equivalents que determinen un MRA són la funció d'escala $\varphi(t)$, el filtre discret h_n o el filtre de freqüències $H(\omega)$. Cada un d'ells conté tota la informació rellevant. Complementaris a ells tenim la funció wavelet $\psi(t)$, el filtre discret g_n i el filtre de freqüències $G(\omega)$.

3.1 Anàlisi de multiresolució (MRA)

Treballem en l'espai de Hilbert complex $L^2(\mathbb{R})$. Un *anàlisi de multiresolució* és una seqüència creixent de subespais de $L^2(\mathbb{R})$, $V_j, j \in \mathbb{Z}$

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \quad (3.1)$$

i una funció $\varphi(t)$ (*funció d'escala*) que satisfan les següents condicions:

1. $\cup_j V_j$ és dens en $L^2(\mathbb{R})$,
2. $\cap_j V_j = \{0\}$,
3. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0$
4. $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de V_0 .

La condició (1) vol dir que per tot $\epsilon > 0$ i per tota funció f de $L^2(\mathbb{R})$ hi ha un j prou elevat tal que podem triar una funció g en V_j amb $\|f - g\| < \epsilon$. (1) i (2) són equivalents a dir que les projeccions de qualsevol funció f verifiquen

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{V_j} f = f, \quad (3.2)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_{V_j} f = 0. \quad (3.3)$$

La condició (3) diu que els espais V_j són versions a diferents escales d'un espai V_0 . Pensem en V_0 com un espai tal que $P_{V_0} f$ és un "mostreig" de f a una resolució donada. Els altres espais donen

mostreigs a resolucions diferents, més fines per $j > 0$ i menys fines per $j < 0$. Les condicions no són trivials. Si, partim d'un espai V_0 qualsevol i definim V_j a través de (3), les condicions (1),(2) en general no es verifiquen.

La condició (4) introdueix un índex n de "posició". És no trivial ja que, en general, una funció no és ortogonal als seus desplaçaments.

Aquestes propietats sintetitzen el que passa en l'anàlisi de Haar on V_0 són les funcions constants als intervals $(n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$ i $\varphi = 1_{[0,1]}$. La motivació és trobar altres casos amb funció d'escala més apropiada.

3.1.1 Wavelets

Si bé és cert que

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots + V_{-1} + V_0 + V_1 + \cdots$$

o, a partir d'un J qualsevol

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J + V_{J+1} + \cdots$$

aquesta no és una descomposició ortogonal ja que cada V_j conté els anteriors (si fossin ortogonals la intersecció seria nul·la.) Per això s'introdueixen els espais de wavelets W_j a partir dels complements ortogonals de V_j en V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (3.4)$$

Llavors les projeccions verifiquen

$$P_{V_{j+1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f. \quad (3.5)$$

Una versió de f a una certa resolució descomposa en una versió a resolució inferior més una part que ha de contenir els detalls perduts al baixar de resolució. Els espais W_j s'anomenen també *espais de detall*.

Dilatant els dos costats de $V_1 = V_0 \oplus W_0$ veiem que $f(t) \in W_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0$. Ara tenim les descomposicions ortogonals

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j,$$

o a partir d'un J qualsevol

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \bigoplus_{j=J}^{\infty} W_j. \quad (3.6)$$

3.1.2 Bases

De la definició de MRA s'obté immediatament la base ortonormal de V_j $\{2^{j/2}\varphi(2^j t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. En efecte, és immediat veure que generen l'espai i

$$\begin{aligned} (2^{j/2}\varphi(2^j t - m), 2^{j/2}\varphi(2^j t - n)) &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2^j t - m)\varphi(2^j t - n)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s - m)\varphi(s - n)^* ds = \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

Degut a que la funció d'escala $\varphi(t)$ acaba donant la resta de funcions de la base, aquesta també s'anomena *funció pare*.

Per l'espai W_0 voldrem tenir una base de la forma $\{\psi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ on $\psi(t)$ serà un element fixat (*funció mare*) ortogonal a $\varphi(t-n)$ per tot n .

El fet que variar j equivalgui a fer un canvi d'escala redueix a resoldre el problema a nivell 0. Considerem els espais V_0, V_1 amb bases ortonormals $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{\sqrt{2}\varphi(2t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ respectivament. Donat que $V_0 \subset V_1$ i $W_0 \subset V_1$, han d'existir seqüències de ℓ^2 , $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tals que

$$\varphi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t-n), \quad (3.7)$$

$$\psi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2} \varphi(2t-n). \quad (3.8)$$

Trobem ara les condicions que han de verificar h_n i g_n . Notem la propietat d'invariància translacional del producte escalar, per qualsevol $a \in \mathbb{R}$ $(f(t-a), g(t-a)) = (f(t), g(t))$. Amb el canvi $s = t - a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)g(t-a)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(s)^* ds.$$

Llavors $(\varphi(t-m), \varphi(t-n)) = (\varphi(t-(m-n)), \varphi(t))$ i és suficient imposar

$$(\varphi(t-m), \varphi(t)) = \delta_{m,0}.$$

Així

$$\begin{aligned} \delta_{m,0} &= \left(\sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t - (n+2m)), \sum_{n'} h_{n'} \sqrt{2} \varphi(2t - n) \right) \\ &= \sum_n \sum_{n'} h_n h_{n'}^* \delta_{n+2m, n'} = \sum_n h_n h_{n+2m}^*. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Anàlogament

$$\delta_{m,0} = \sum_n g_n g_{n+2m}^*, \quad (3.10)$$

i l'ortogonalitat entre V_0 i W_0 implica

$$0 = \sum_n g_n h_{n+2m}^*. \quad (3.11)$$

Donats $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i $g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ verificant (3.9,3.10,3.11) tenim assegurada les relacions d'ortogonalitat de les funcions $\varphi(t), \psi(t)$ que compleixin (3.7,3.8). Una qüestió és si donats h, g podem determinar $\varphi(t), \psi(t)$. La resposta es que sí a través d'iterar (3.7,3.8). El fet que aquest procés no sigui directe o no doni resultats molt explícits no té importància ja que l'instrument bàsic d'anàlisi acaben sent h, g .

3.1.3 Alguns resultats

Veiem, sense demostrar-les, algunes condicions relacionades amb l'existència del MRA (propietats 1 a 4).

Teorema

Si la funció $\varphi(t)$ té suport compacte i està acotada llavors es compleix la propietat 2.

Teorema

Si la funció $\varphi(t)$ té suport compacte, verifica (3.7), la propietat 4 i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1 \quad (3.12)$$

llavors es compleix la propietat 1.

(És fàcil veure que $\varphi(t)$ té integral no nul·la. Si no fos així, per linealitat veiem que totes les funcions dels espais V_j tindrien integral nul·la i mai generariem tot l'espai $L^2(\mathbb{R})$. Amb això integrant els dos costats de (3.7) obtenim la condició

$$\sum_n h_n = \sqrt{2}.$$

Es demostra també que la condició (3.12) és necessària per tenir un MRA.)

3.2 Formulació en el domini freqüencial

Moltes relacions del MRA tenen un aspecte convolucional que sugereix la conveniència de transformar per Fourier.

Si transformem els dos costats de (3.7) i (3.8) trobem

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.13)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\frac{\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.14)$$

Definim així els filtres $H(\omega)$ i $G(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\omega}, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\omega}. \quad (3.15)$$

Llavors

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.16)$$

Notem que la primera equació en (3.16) és una relació recursiva per φ . Com $\hat{\varphi}(0) = 1$ (veure (3.12)) tenim la solució

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega).$$

Les condicions d'ortogonalitat (3.9,3.10,3.11) es traslladen a condicions sobre els filtres freqüencials.

Teorema

Si $H(\omega)$ és una funció de període 2π que verifica $\forall \omega$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.17)$$

i tal que $H(0) = 1$, és \mathcal{C}^1 en un entorn de 0 i $\inf_{[-\pi/2, \pi/2]} |H(\omega)| > 0$, llavors

$$\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega)$$

és una funció d'escala.

Teorema

Donat $H(\omega)$ verificant les condicions del teorema anterior, el wavelet queda determinat per qualsevol $G(\omega)$ que verifiqui $\forall \omega$

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1, \quad (3.18)$$

$$G(\omega)H^*(\omega) + G(\omega + \pi)H^*(\omega + \pi) = 0 \quad (3.19)$$

Es troba fàcilment la solució

$$G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) \quad g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}^* \quad (3.20)$$

Dos filtres H, G que verifiquen les condicions (3.17), (3.18), (3.19) es diu que són *filtres conjugats* (*conjugate mirror filters*.)

3.3 Banc de filtres. Anàlisi

L'instrument principal en les aplicacions és l'anàlisi de funcions descomposant-les en parts corresponents als diferents blocs de (3.6). Els càlculs involucren només els filtres discrets h_n, g_n .

Introduïm alguna notació. Els elements de les bases de V_J i W_J els denotem

$$\varphi_{J,n}(t) = 2^{\frac{J}{2}} \varphi(2^J t - n), \quad \psi_{J,n}(t) = 2^{\frac{J}{2}} \psi(2^J t - n).$$

Una funció qualsevol $f(t)$ té projeccions

$$P_{V_J} f(t) = \sum_n a_J[n] \varphi_{J,n}(t), \quad P_{W_J} f(t) = \sum_n b_J[n] \psi_{J,n}(t)$$

on

$$a_J[n] = (f, \varphi_{J,n}), \quad b_J[n] = (f, \psi_{J,n}).$$

Els coeficients $a_J[n], b_J[n]$ es calculen a partir de $a_{J+1}[n]$ amb l'acció dels filtres adequats. La relació bàsica és

$$\varphi_{J,n} = \sum_m h_{m-2n} \varphi_{J+1,m} \quad \psi_{J,n} = \sum_m g_{m-2n} \varphi_{J+1,m} \quad (3.21)$$

DEM:

$$\begin{aligned} \varphi_{J,n}(t) &= 2^{\frac{J}{2}} \varphi(2^J t - n) = \sum_m h_m 2^{\frac{J}{2}} \sqrt{2} \varphi(2(2^J t - n) - m) \\ &= \sum_m h_m 2^{\frac{J+1}{2}} \varphi(2^{J+1} t - (m + 2n)) = \sum_m h_m \varphi_{J+1, m+2n}(t) = \sum_m h_{m-2n} \varphi_{J+1, m}(t) \end{aligned}$$

La demostració de la segona igualtat és anàloga ♣

Ara definim els filtres

$$\bar{h}[n] = h_{-n}^*, \quad \bar{g}[n] = g_{-n}^*. \quad (3.22)$$

i obtenim els resultats

$$a_J[n] = (a_{J+1} * \bar{h})[2n], \quad b_J[n] = (a_{J+1} * \bar{g})[2n]. \quad (3.23)$$

(La convolució discreta de dues seqüències $c[n], d[n]$ és $(c * d)[n] = \sum_k c[k]d[n-k]$).

DEM:

$$\begin{aligned} a_J[n] &= (f, \varphi_{J,n}) = (f, \sum_m h_{m-2n} \varphi_{J+1,m}) = \sum_m h_{m-2n}^* (f, \varphi_{J+1,m}) \\ &= \sum_m h_{m-2n}^* a_{J+1}[m] = \sum_m \bar{h}[2n-m] a_{J+1}[m] = (a_{J+1} * \bar{h})[2n]. \end{aligned}$$

La demostració de la segona igualtat és anàloga ♣

Notem que a més de la convolució amb \bar{h}, \bar{g} hi ha una decimació (*downsampling*: prenem els elements parells.)

Pel procés invers (reconstrucció) tenim que segons (3.21)

$$\varphi_{J+1,n} = \sum_m h_{n-2m}^* \varphi_{J,m} + g_{n-2m}^* \psi_{J,m} \quad (3.24)$$

i

$$a_{J+1,n} = (f, \varphi_{J+1,n}) = \sum_m h_{n-2m} a_{J,m} + g_{n-2m} b_{J,m}$$

que s'escriu

$$a_{J+1}[n] = (\tilde{a}_J * h)[n] + (\tilde{b}_J * g)[n]. \quad (3.25)$$

on $\tilde{c}[2n+1] = 0, \tilde{c}[2n] = c[n]$ (*upsampling*.)

3.3.1 Anàlisi a partir del mostreig

En les aplicacions partirem d'una seqüència $f_J[n]$ provinent d'un mostreig fet a una certa resolució. El significat d'aquests coeficients depèn del aparell i condicions de la mesura i s'interpreta com corresponent a la projecció d'una certa $f(t)$ sobre V_J , és a dir prenem $a_J[n] = f_J[n]$. Això es pot fer perquè el mostreig suposa un promig localitzat que difereix poc de la projecció sobre les funcions $\varphi_{J,n}$ que també són localitzades.

A partir d'aquí anem descomposant cap a resolucions inferiors a J . En cada pas obtenim uns coeficients $b_{K,m}$ de detalls que guardem i una component de baixa freqüència donada per $a_{K,m}$ que és objecte de la següent descomposició. En el moment en que parem el procés guardem la última part de baixa freqüència com a part de l'anàlisi.

3.4 Anàlisi bidimensional

Pel tractament d'imatges s'ha d'extendre el tractament anterior a dues dimensions. El *procediment estàndar* és la descomposició¹

$$V_{J+1} \otimes V_{J+1} = (V_J \otimes V_J) \oplus (V_J \otimes W_J) \oplus (W_J \otimes V_J) \oplus (W_J \otimes W_J)$$

¹En l'apèndix s'explica el producte directe d'espais de Hilbert.

El primer terme resultant és el que es continua descomposant mentre que els altres tres són tres tipus de detalls que es guarden com a resultat de l'anàlisi. Cada terme es troba amb l'acció de filtres discrets bidimensionals que són $\bar{h} \otimes \bar{h}, \bar{h} \otimes \bar{g}, \bar{g} \otimes \bar{h}, \bar{g} \otimes \bar{g}$.

Si, per exemple, partim d'una imatge quadrada de tamany 16×16 les 4 parts de la descomposició són arrays de tamany 8×8 que es disposen formant un quadrat 16×16 amb la component de baixa freqüència en la part superior esquerra.

El procediment estàndar equival a fer la transformació a les files i després a les columnes dels coeficients obtinguts. Hi ha un *procediment no estàndar* que consisteix en fer l'anàlisi de resolució sobre l'espai $V_0 \otimes V_0$ de manera que tots els elements de la base resultants són de suport quadrat a diferència del cas estàndar en que tenim elements amb suport rectangular.

Capítol 4

Wavelets de Daubechies

A finals dels 80 Ingrid Daubechies va introduir una família de wavelets amb bones propietats en quant a suport i regularitat¹.

4.1 Resultats bàsics i notació

Aquest apartat resumeix els resultats del capítol anterior. $\varphi(t)$ és la funció d'escala i $\psi(t)$ és el wavelet. $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal de V_0 , espai amb el que construïm l'anàlisi de multiresolució. Els espais V_j , $j \in \mathbb{Z}$ contenen elements de la forma $f(2^j t)$ pels $f(t) \in V_0$ i constitueixen una seqüència creixent de subespais. En particular $V_0 \subset V_1$ i, per tant, podem considerar una descomposició ortogonal $V_1 = V_0 \oplus W_0$. Els desplaçaments enters de $\psi(t)$ ens donen una base de W_0 .

Aquests fets es tradueixen en les següents relacions

$$\varphi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t - n), \quad \psi(t) = \sum_n g_n \sqrt{2} \varphi(2t - n). \quad (4.1)$$

que, transformant per Fourier, són

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (4.2)$$

on

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-jn\omega}, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-jn\omega}. \quad (4.3)$$

H i G són els filtres que aplicats a un senyal extreuen una component de baixa freqüència i una de alta freqüència. La component d'alta freqüència ens dona l'expansió en la base de wavelets de la funció analitzada. Les seqüències $\{h_n\}$ i $\{g_n\}$ pertanyen a l^2 i són els coeficients de Fourier dels filtres $H(\omega)$ i $G(\omega)$ (llevat d'una constant $\sqrt{2}$).

En el cas de Haar s'ha vist que els únics coeficients no nuls són $h_0 = h_1 = g_0 = -g_1 = 1/\sqrt{2}$.

$$H(\omega) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{2}, \quad G(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{2} \quad (4.4)$$

¹I. Daubechies, *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets* Comm. Pure Appl Math. **41** (1988), 909-996.

Si coneixem $H(\omega)$, fent iteracions de la primera igualtat en (4.1) determinem la funció d'escala. Tota la informació es troba en la funció $H(\omega)$ o, alternativament, en la seqüència $\{h_n\}$. En les aplicacions, el càlcul numèric es fa a partir del filtre discret $\{h_n\}$.

Els següents resultats donen condicions que ha de verificar $H(\omega)$ per tal de tenir un anàlisi de multiresolució.

Teorema

Si $H(\omega)$ és una funció de període 2π que verifica $\forall \omega$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{4.5}$$

i tal que $H(0) = 1$, és \mathcal{C}^1 en un entorn de 0 i $\inf_{[-\pi/2, \pi/2]} |H(\omega)| > 0$, llavors $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H(2^{-j}\omega)$ és una funció d'escala.

Teorema

Donat $H(\omega)$ verificant les condicions del teorema anterior, el wavelet queda determinat per qualsevol $G(\omega)$ que verifiqui $\forall \omega$

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1, \tag{4.6}$$

$$G(\omega)H^*(\omega) + G(\omega + \pi)H^*(\omega + \pi) = 0. \tag{4.7}$$

Es troba fàcilment la solució

$$G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi) \quad g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}^* \tag{4.8}$$

4.2 Característiques dels wavelets

L'elecció d'un wavelet determinat es fa demanant que tingui propietats adequades al problema que volem tractar. Hi ha tres característiques bàsiques a tenir en compte.

- **Moments nuls**

Un wavelet té p moments nuls si per $0 \leq k < p$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0. \tag{4.9}$$

Aquesta propietat és útil perquè assegura un decreixement ràpid dels coeficients de les expansions en wavelets. (4.9) equival a que $H(\omega)$ i les seves $p - 1$ primeres derivades s'anul·lin en $\omega = \pi$. (Es demostra a partir de 4.2.)

- **Suport**

El suport d'una funció és la regió on és diferent de zero. Si el senyal que analitzem té una singularitat en un punt i el wavelet té un suport molt gran resulta que hi han molts coeficients elevats al fer l'anàlisi. És convenient utilitzar wavelets amb suport compacte i que aquest sigui petit. Hi ha el següent

Teorema

La funció d'escala $\varphi(t)$ té suport compacte si i només si $\{h_n\}$ té suport compacte. En aquest cas tenen el mateix suport. Si aquest és $[N_1, N_2]$ llavors el suport del wavelet $\psi(t)$ és $[\frac{N_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - N_1 + 1}{2}]$.

- **Regularitat**

El nombre de derivades que admet el wavelet té un efecte en l'error que apareix al quantitzar els coeficients de l'anàlisi. Un wavelet "suau" dona lloc a errors que són menys perceptibles. Per exemple, la irregularitat de la funció de Haar és fa evident al mirar les funcions o imatges reconstruïdes.

4.3 Els wavelets de Daubechies

Volem trobar wavelets amb suport compacte, un cert nombre de moments nuls i una certa regularitat. La funció de Haar té suport compacte, un moment nul i és discontinua. Els wavelets de splines milloren la regularitat del de Haar però pagant el preu de suport infinit.

L'objectiu és trobar un wavelet real, amb suport compacte i p moments nuls. Busquem h_n reals amb suport $[0, N - 1]$. Hem de determinar els N coeficients h_0, h_1, \dots, h_{N-1} . El filtre de freqüències és un polinomi trigonomètric

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-jn\omega} \quad (4.10)$$

El fet de tenir p moments nuls implica un zero d'ordre p en $\omega = \pi$. Així podem escriure

$$H(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2}\right)^p R(e^{-j\omega}) \quad (4.11)$$

on R és un polinomi de grau $N - 1 - p$.

Si els h_n són reals $H(\omega)^* = H(-\omega)$ d'on $|H(\omega)|^2$ és una funció parell. Tot polinomi trigonomètric parell és igual a un polinomi de $\cos \omega$ o, alternativament, de $\sin^2 \frac{\omega}{2}$. Ha d'haver doncs un polinomi P tal que

$$|H(\omega)|^2 = \left(\frac{1 + \cos \omega}{2}\right)^p |R(e^{-j\omega})|^2 = (1 - \sin^2 \frac{\omega}{2})^p P(\sin^2 \frac{\omega}{2}).$$

Definint la variable $y = \sin^2 \frac{\omega}{2}$ tenim que $|H(\omega)|^2 = (1 - y)^p P(y)$. Notem també que el canvi $\omega \rightarrow \omega + \pi$ equival a $y \rightarrow 1 - y$. Amb tot això la condició (4.5) es converteix en

$$(1 - y)^p P(y) + y^p P(1 - y) = 1 \quad (4.12)$$

El teorema de Bezout ens assegura l'existència de dos únics polinomis P_1, P_2 de grau $p - 1$ tals que

$$(1 - y)^p P_1(y) + y^p P_2(y) = 1.$$

Si fem $y \rightarrow 1 - y$ en l'anterior relació veiem que $P_2(y) = P_1(1 - y)$ el que mostra que (4.12) és consistent. Per calcular P dividim (4.12) per $y^{k+1}(1 - y)^p, k = 0, \dots, p - 1$

$$\frac{P(y)}{y^{k+1}} + y^{p-k-1} \frac{P(1 - y)}{(1 - y)^p} = \frac{1}{y^{k+1}(1 - y)^p}$$

i integrem aquesta expressió en el pla complex sobre un petit camí al voltant de 0. La integral del segon terme de l'esquerra val zero per ser analític en $y = 0$. Els altres dos termes s'obtenen amb la fórmula integral de Cauchy i arribem a

$$P^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dy^k} \frac{1}{(1 - y)^p} \Big|_{y=0} = p(p + 1) \cdots (p + k - 1) = \frac{(p + k - 1)!}{(p - 1)!}$$

$$P(y) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+k-1}{k} y^k.$$

Com el grau d'aquest polinomi era $N - 1 - p$, ha de ser $N = 2p$. Hi ha un compromís entre el suport i el nombre de moments nuls.

Ara falta resoldre l'equació

$$|R(e^{-j\omega})|^2 = P(y).$$

Definim la variable $z = e^{-j\omega}$. Llavors $y = (2 - z - z^{-1})/4$ i $|R(e^{-j\omega})|^2 = R(e^{-j\omega})R(e^{-j\omega})^* = R(e^{-j\omega})R(e^{j\omega}) = R(z)R(z^{-1})$ i queda

$$R(z)R(z^{-1}) = P\left(\frac{2 - z - z^{-1}}{4}\right).$$

Aquesta equació es resol a través dels zeros dels polinomis que hi apareixen. Si c és un zero del terme de la dreta, també ho són c^* , c^{-1} , $(c^{-1})^*$ ja que el polinomi és de coeficients reals i és invariant sota $z \rightarrow z^{-1}$. Aquests zeros ho són, llavors, del terme de l'esquerra i així determina R . Els zeros de R apareixen en parelles conjugades i només cal que triem entre c i c^{-1} . El criteri de *mínima fase* consisteix en triar el valor $a \in \{c, c^{-1}\}$ que verifica $|a| > 1$. Per normalitzar el polinomi tenim en compte que per $\omega = 0$ queda $R(z=1) = H(\omega=0) = 1$.

Exemple

Per $p = 1$, $N = 2$, $R = 1$ i tenim el cas de Haar.

Per $p = 2$, $N = 4$, $P(y) = 1 + 2y$.

$$P\left(\frac{2 - z - z^{-1}}{4}\right) = \frac{4 - z - z^{-1}}{2}$$

Te els zeros $2 + \sqrt{3}$ i $2 - \sqrt{3}$. Triem el primer. Així

$$R(z) = \frac{z - (2 + \sqrt{3})}{-1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z}{2},$$

$$H = \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 \frac{1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})z}{2} = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})z + (3 - \sqrt{3})z^2 + (1 - \sqrt{3})z^3).$$

Com (4.10) és

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h_n z^n \quad (4.13)$$

tenim

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 + \sqrt{3}), \quad h_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3 + \sqrt{3}), \quad h_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}(3 - \sqrt{3}), \quad h_3 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - \sqrt{3}).$$

Per valors més grans de p calen rutines numèriques per calcular les arrels.

Capítol 5

Spline Wavelets

Una extensió natural del wavelet de Haar són els wavelets que es construeixen a partir de *splines*. Els splines s'utilitzen en càlcul numèric dins del mètode dels elements finits. Són funcions que tenen forma polinòmica en intervals i admeten un cert nombre de derivades. Els wavelets que s'obtenen a partir d'ells també s'anomenen de Battle-Lemarié

5.1 m -splines

Més concretament definim l'espai dels m -splines

$$V_0 = \{\text{funcions de classe } \mathcal{C}^{m-1} \text{ que coincideixen amb polinomis de grau } m \text{ en } [n, n+1] \forall n\}.$$

(Sense dir-ho explícitament les funcions que es consideren a partir d'ara són de $L^2(\mathbb{R})$ i l'expressió “polinomi de grau m ” vol dir 0 o polinomi de grau menor o igual que m .)

Si $m = 0$ tenim les funcions constants a trossos que donen lloc al wavelet de Haar. Si $m = 1$ tenim funcions formades per segments rectilinis empalmats amb continuïtat. Si $m = 2$ tenim trossos de paràbola que s'empalmen amb continuïtat i derivabilitat. Etc.

Notem que el nombre de graus de llibertat per interval és sempre 1. Si tenim fixat el polinomi en un interval, el del següent ja té fixat el seu valor i el de les seves $m - 1$ derivades en un punt. Així només queda una constant a determinar.

L'espai V_0 és el punt de partida per construir una anàlisi de multiresolució a partir de les seves dilatacions. Tenim que

$$V_j = \{\text{funcions de classe } \mathcal{C}^{m-1} \text{ que coincideixen amb polinomis de grau } m \text{ en } [2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)] \forall n\}.$$

El següent pas és trobar una base ortonormal de V_0 de la forma $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ on $\varphi(t)$ serà la funció d'escala. El procediment és partir d'una base de Riesz de la forma $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Aquesta base no serà ortonormal per $m > 0$.

Per $m = 0$ prenem $\theta(t) = 1_{[0,1]}$, funció característica de l'interval unitat. Recordem que

$$\hat{\theta}(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (5.1)$$

Per obtenir les d'ordre superior podem fer convolucions de $\theta(t)$ amb ella mateixa. Efectivament, cada convolució amb $\theta(t)$ augmenta un grau la dependència polinòmica i dona un ordre més de derivabilitat. En representació de freqüències això correspon a prendre potències de la funció (5.1). Naturalment, tenim llibertat per desplaçar un nombre enter la funció resultant. Això equival a eliminar una fase de la forma $e^{jq\omega}$, $q \in \mathbb{Z}$ en $\hat{\theta}(\omega)$.

Així pels m -splines triem

$$\hat{\theta}(\omega) = e^{-j\epsilon\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc}^{m+1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.2)$$

on ϵ val 1 per m parell i 0 per m senar. Això implica que per m senar $\theta(t)$ és simètrica mentre que per m parell està centrada a $t = 1/2$ (per exemple, el cas de Haar).

Utilitzant que

$$(1_{[0,1]} * f)(t) = \int_0^1 f(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^t f(x) dx$$

és fàcil calcular els primers casos. Donem només la funció en les regions on no s'anul·la.

$m = 0$

$$\theta(t) = 1 \quad t \in [0, 1].$$

$m = 1$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 + t & t \in [-1, 0], \\ 1 - t & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

$m = 2$

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(1+t)^2}{2} & t \in [-1, 0], \\ \frac{1}{2} + t - t^2 & t \in [0, 1], \\ \frac{(2-t)^2}{2} & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

5.2 Funció d'escala

En el cas $m = 1$ diem que la convolució de dos polsos quadrats dóna un pols triangular, etc. Es pot comprovar que els desplaçaments d'aquestes funcions donen bases però aquestes no són ortonormals. Si $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és una base ortonormal llavors per tot n

$$(\varphi(t - n), \varphi(t)) = \delta_{0,n}.$$

És a dir

$$2\pi\delta_{0,n} = (e^{-jn\omega} \hat{\varphi}, \hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jn\omega} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega.$$

Això vol dir que

$$\sum_k |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (5.3)$$

ja que és una funció periòdica amb tots els coeficients de la seva sèrie de Fourier nuls excepte el de la constant.

El que volem és una funció de V_0 amb aquesta propietat. Si és de V_0 , existeixen coeficients a_n tals que $\varphi(t) = \sum_n a_n \theta(t - n)$. Transformant per Fourier, $\hat{\varphi}(\omega) = A(\omega) \hat{\theta}(\omega)$ on $A(\omega)$ és la funció de període 2π que té coeficients de Fourier a_n . Perquè es verifiqui (5.3) només cal prendre $A(\omega) = [\sum_k |\hat{\theta}(\omega + 2\pi k)|^2]^{-1/2}$ amb el que la funció d'escala s'obté

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{\theta(\omega)}{[\sum_k |\hat{\theta}(\omega + 2\pi k)|^2]^{1/2}} \quad (5.4)$$

En el nostre cas serà

$$|\hat{\theta}(\omega + 2\pi k)|^2 = \sin^{2m+2}\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{2^{2m+2}}{(\omega + 2\pi k)^{2m+2}}$$

Si definim la funció

$$S_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^n} \quad (5.5)$$

ens queda

$$\hat{\varphi}(\omega) = \text{sg}\left(\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{m+1} \frac{e^{-j\epsilon\frac{\omega}{2}}}{\omega^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\omega)}} \quad (5.6)$$

(notem que per m senar és $\hat{\varphi}(\omega) = 1/(\omega^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\omega)})$).

Per calcular S_{2m+2} veiem que el resultat per $m = 0$ ja el coneixem (Haar). Això implica

$$S_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2\pi k)^2} = \frac{1}{4 \sin^2(\omega/2)}. \quad (5.7)$$

A més és veu immediatament

$$\frac{d^2}{d\omega^2} S_n(\omega) = n(n+1) S_{n+2}(\omega)$$

d'on treiem

$$S_{2m+2}(\omega) = \frac{S_2^{(2m)}(\omega)}{(2m+1)!} \quad (5.8)$$

5.3 Filtres

Finalment, el que té més interès en les aplicacions són els filtres que permeten calcular la transformada de wavelet. És

$$H(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}.$$

Aquest filtre té la sèrie de Fourier $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-jn\omega}$ amb

$$h_n = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jn\omega} H(\omega) d\omega. \quad (5.9)$$

Llavors

$$H(\omega) = \left(\frac{\text{sg}(\sin(\omega))}{\text{sg}(\sin(\frac{\omega}{2}))} \right)^{m+1} \frac{e^{-j\epsilon\frac{\omega}{2}}}{2^{m+1}} \sqrt{\frac{S_{2m+2}(\omega)}{S_{2m+2}(2\omega)}} \quad (5.10)$$

Notem que el primer factor desapareix per m senar i val $\text{sg}(\cos(\omega/2))$ per m parell.

5.4 Primers casos

Els primers casos són:

$$S_4(\omega) = \frac{1 + 2 \cos^2(\omega/2)}{48 \sin^4(\omega/2)}. \quad (5.11)$$

$$S_6(\omega) = \frac{2 + 11 \cos^2(\omega/2) + 2 \cos^4(\omega/2)}{960 \sin^6(\omega/2)}. \quad (5.12)$$

$$S_8(\omega) = \frac{17 + 180 \cos^2(\omega/2) + 114 \cos^4(\omega/2) + 4 \cos^6(\omega/2)}{80640 \sin^8(\omega/2)}. \quad (5.13)$$

Per $m = 1$ (spline lineal)

$$H(\omega) = \cos^2(\omega/2) \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2(\omega/2)}{1 + 2 \cos^2(\omega)}}. \quad (5.14)$$

Per $m = 2$

$$H(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos^3(\omega/2) \sqrt{\frac{2 + 11 \cos^2(\omega/2) + 2 \cos^4(\omega/2)}{2 + 11 \cos^2(\omega) + 2 \cos^4(\omega)}}. \quad (5.15)$$

Per $m = 3$ (spline cúbic)

$$H(\omega) = \cos^4(\omega/2) \sqrt{\frac{17 + 180 \cos^2(\omega/2) + 114 \cos^4(\omega/2) + 4 \cos^6(\omega/2)}{17 + 180 \cos^2(\omega) + 114 \cos^4(\omega) + 4 \cos^6(\omega)}}. \quad (5.16)$$

Els coeficients h_n es poden calcular integrant numèricament (5.9) amb (5.14),(5.15),(5.16).

5.5 Wavelets

El wavelet i seu filtre associat s'obtenen de la manera habitual

$$G(\omega) = e^{-j\omega} H^*(\omega + \pi), \quad g_n = (-1)^{1-n} h_{1-n}.$$

$$\hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{-j\frac{\omega}{2}} H^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

5.6 Propietats

Un greu problema del wavelet de Haar és la seva falta de localització en freqüència que reflecteix la seva discontinuïtat. Això fa que no sigui útil en les aplicacions. El wavelets donats per splines eliminen aquest problema ja que podem triar el nombre de derivades que admet. La funció és localitzada en el temps ja que es pot veure que decau de manera exponencial. Una ventatja adicional és que coneixem les seves expressions de manera analítica.

L'inconvenient principal d'aquests wavelets és que els filtres h_n no són de longitud finita. El càlcul de convolucions ens porta a sumar una sèrie per cada punt al contrari que en el cas de Haar on només hi havien dos valors.

Degut a això l'interès s'ha centrat principalment en els wavelets de Daubechies que tenen filtres de longitud finita. La limitació dels splines, però, es pot superar amb l'ús de wavelets biortogonals i, per tant, cal tenir-los en compte.

Capítol 6

Subdivisió Recursiva

Els procediments de subdivisió recursiva són esquemes iteratius per anar incrementant el nivell de resolució d'una funció. Els *punts diàdics* són els nombres reals de la forma $2^{-J}k$ per $J, k \in \mathbb{Z}$. Formen un conjunt dens en \mathbb{R} , és a dir, tot nombre real és límit d'alguna successió de nombres diàdics¹.

Per J fixat, una seqüència $c^J = \{c_k^J, k \in \mathbb{Z}\}$ es pot pensar com un mostreig amb resolució J d'una funció: $c_k^J = f(2^{-J}k)$. La seqüència pot representar directament una funció en un espai V_J d'un anàlisi de multiresolució. Per exemple, en el cas de Haar els valors c_k^J poden ser l'alçada en l'interval k -èssim, o podem unir amb segments rectilinis els diferents punts per obtenir un spline lineal continu.

Considerem transformacions lineals que ens passin $c^J \rightarrow c^{J+1}$ de manera que partim d'un primer mostreig i l'anem refinant i tendint cap a una funció amb propietats adequades.

6.1 Subdivisió uniforme

Partim d'un spline lineal. Això és, una funció $f^0(t)$ que és de la forma $at + b$ en cada interval $(n, n + 1), n \in \mathbb{Z}$. La funció és contínua de manera que queda determinada per $c_k^0 = f^0(k)$. L'algoritme de subdivisió genera un spline lineal amb resolució superior substituint cada valor per un promig dels valors en un entorn seu:

$$f^{J+1}(2^{-(J+1)}k) = \sum_n r_n f^J(2^{-J}(k+n)), \quad (6.1)$$

El promig es realitza a través del filtre r que prenem finit. El filtre el triem generalment simètric, si té longitud senar $2M + 1$, $r = [r_M, \dots, r_1, r_0, r_1, \dots, r_M]$. Com el procediment és lineal, multiplicar el filtre per una constant R equival a multiplicar f^J per R^J . Fixem, per conveni, que $\sum_n r_n = 1$.

El cas més senzill és el l'algoritme de Chaikin que correspon a $r = [1/2, 1/2]$. En aquest cas (6.1) es redueix a

$$f^{J+1}(2^{-(J+1)}k) = \frac{f^J(2^{-J}k) + f^J(2^{-J}(k+1))}{2}, \quad (6.2)$$

Per exemple, el primer pas és

$$f^1\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{f^0\left(\frac{k}{2}\right) + f^0\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2}. \quad (6.3)$$

¹De fet, l'expansió binària d'un nombre real és una d'aquestes successions.

Notem que es requereix els valors de f^0 en els semienters. Aquests no estan continguts en la llista c^0 i s'han d'extrapolat. Degut a això el procediment de subdivisió consta de dues parts

$$c^J \rightarrow \check{c}^{J+1} \rightarrow c^{J+1}$$

- Extensió. Consisteix en insertar entre cada dos elements consecutius c_k^J, c_{k+1}^J el seu valor mig $(c_k^J + c_{k+1}^J)/2$.

$$\check{c}_{2k}^{J+1} = c_k^J, \quad \check{c}_{2k-1}^{J+1} = \frac{c_k^J + c_{k+1}^J}{2}. \quad (6.4)$$

- Promig

$$c_k^{J+1} = \sum_n r_n \check{c}_{k+n}^{J+1}. \quad (6.5)$$

La transformació (6.5) és una convolució amb r_{-n} que coincideix amb r si el triem simètric.

6.1.1 Filtres típics

La funció límit resulta ser un spline de grau $n + 1$ si utilitzem el filtre

$$r = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right] \quad (6.6)$$

L'exemple anterior de Chaikin és el cas $n = 1$ i el seu límit és un spline parabòlic. Un altre cas útil per computer graphics és $n = 2$

$$\frac{1}{4} [1, 2, 1].$$

El tipus de funció límit pot variar molt segons el filtre utilitzat. Per exemple

$$\frac{1}{2} [1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}].$$

dóna un límit no analític.

6.1.2 Interpolació

El l'anterior procés la funció que va surtint no passa pels mateixos punts que l'anterior. Es pot modificar el procediment de promig per que la funció passi sempre pels punts inicials.

$$c_k^J = \check{c}_k^J \quad \text{per } k \text{ parell} \\ c_k^J = \sum_n r_n \check{c}_{k+n}^J \quad \text{per } k \text{ senar.} \quad (6.7)$$

Un filtre que dóna interpolacions suaus és el de Dyn-Levin-Gregory

$$\frac{1}{16} [-2, 5, 10, 5, -2].$$

6.1.3 Efectes de frontera

Generalment les funcions a que s'aplica l'anterior procediment estan definides en un interval. L'aplicació directa del mètode en els extrems de la funció té efectes no desitjats al promitjar amb els zeros de fora l'interval. El problema es deu a que estem fent *subdivisió uniforme* que consisteix en aplicar el mateix filtre en tots els punts.

Això es pot arreglar modificant el filtre a l'aplicar-lo a les posicions extremes. En aquest cas es parla de subdivisió *no uniforme*.

6.1.4 Corbes en el pla

Un polígon en el pla correspon a una seqüència de punts

$$[[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_N, y_N]].$$

Com l'últim punt s'uneix al primer, podem moure cíclicament la seqüència sense que variï el polígon.

El procés de subdivisió s'aplica a les dues coordenades, és a dir a les seqüències $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ i $[y_1, y_2, \dots, y_N]$ per separat. Les extensions i convolucions es fan de manera cíclica i no hi ha efectes de frontera. També es pot aplicar l'esquema interpolador.

6.1.5 Aplicacions

El procés de subdivisió recursiva s'aplica a gràfics d'ordinador. La seqüència inicial acostuma a ser una estructura de control de la gràfica mentre que el resultat suau de la subdivisió és el que apareix finalment en la imatge.

6.2 Iteracions amb l'equació d'escala

En un anàlisi de multiresolució la funció d'escala $\varphi(t)$ verifica l'equació d'escala

$$\varphi(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi(2t - n). \quad (6.8)$$

Hi han casos en que coneixem el filtre h i volem determinar la funció d'escala a partir d'ell. Una manera és considerar (6.8) com un problema de punt fix per la transformació

$$\varphi^{J+1}(t) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi^J(2t - n). \quad (6.9)$$

A partir d'una funció inicial $\varphi^0(t)$ podem considerar el comportament límit de $\varphi^{J+1}(t)$, $J \rightarrow \infty$. De fet, utilitzem aproximacions diàdiques que es van refinant amb (6.9). Així φ^J pren valors en els punts diàdics de nivell J i

$$\varphi^{J+1}(2^{-(J+1)}k) = \sum_n h_n \sqrt{2} \varphi^J(2^{-J}k - n). \quad (6.10)$$

Utilitzant novament les seqüències $c_k^J = \varphi^J(2^{-J}k)$ ens queda

$$c_k^{J+1} = \sum_n h_n \sqrt{2} c_{k-2^J n}^J. \quad (6.11)$$

És fàcil veure que aquesta equació és

$$c^{J+1} = h^J * c^J. \quad (6.12)$$

on $h^0 = \sqrt{2}h$ i en general h^J és el filtre que s'obté insertant $2^J - 1$ zeros entre cada dos elements de $\sqrt{2}h$.

6.2.1 Condició inicial

Com el procés és lineal és suficient resoldre'l per una condició inicial del tipus $c_k^0 = \delta_{k,l}$. De fet si variem la posició l de la delta estem fent una translació i el resultat equival a traslladar el resultat que s'obté amb $l = 0$. Per tant, fem el càlcul amb $c^0 = [1]$.

6.2.2 Procediment

Si volem obtenir la funció d'escala $\varphi(t)$ i la funció wavelet $\psi(t)$ a una resolució donada J partim de $c^0 = [1]$ i apliquem J passos de (6.12). La llista obtinguda és l'aproximació a la funció d'escala.

Per trobar el wavelet utilitzem c^{J-1} i fem un pas de tipus (6.12) canviant el filtre h pel filtre g .

Recordem que si el filtre és $h = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$ llavors el suport de $\varphi(t)$ és l'interval $[0, N-1]$ i el de $\psi(t)$ és $[1 - N/2, N/2]$

6.2.3 Procediment alternatiu

Diem *upsampling* a la operació d'insertar un zero entre cada dos elements consecutius d'una llista. Per exemple $x = [2, -1, 4, 8]$, $u(x) = [2, 0, -1, 0, 4, 0, 8]$. En general

$$u(x)_k = \begin{cases} x_{\frac{k}{2}} & \text{per } k \text{ parell,} \\ 0 & \text{per } k \text{ senar.} \end{cases} \quad (6.13)$$

Podem condensar l'anterior resultat posant $u(x)_k = x_{k/2}$ i entenent que x val zero per índex no enter.

Resulta que

$$u(x * y) = u(x) * u(y). \quad (6.14)$$

En efecte:

$$\begin{aligned} (u(x) * u(y))_n &= \sum_k u(x)_k u(y)_{n-k} = \sum_k x_{\frac{k}{2}} y_{\frac{n-k}{2}} \\ &= \sum_k x_k y_{\frac{n}{2}-k} = (x * y)_{\frac{n}{2}} = u(x * y)_n \end{aligned}$$

Llavors en l'equació (6.12) apareix h^J que és $u(h^{J-1})$ i les successives iteracions van donant

$$\begin{aligned} c^0 &= 1, \\ c^1 &= h^0 * 1 = h^0, \\ c^2 &= h^1 * h^0 = h^0 * u(h^0), \\ c^3 &= h^2 * c^2 = u(u(h^0)) * (h^0 * u(h^0)) = h^0 * u(h^0 * u(h^0)) = h^0 * u(c^2), \end{aligned}$$

i, en general

$$c^{J+1} = h^0 * u(c^J). \quad (6.15)$$

En cada pas insertem un zero en la seqüència c i convolucionem amb h^0 .

Capítol 7

El principi d'incertesa temps-freqüència

7.1 Introducció

És corrent representar determinats fenòmens o objectes (anomenats genèricament senyals) per funcions d'un determinat espai. Aquestes funcions representen la informació continguda en la classe de senyals que un vulgui estudiar. Exemples concrets en serien l'anàlisi de la veu representada per funcions f representant $f(t)$ la pressió de l'aire en un punt donat de l'espai en l'instant t , o l'anàlisi d'imatges amb funcions $f(x, y)$ que donen la lluminositat o el color en el punt de coordenades (x, y) sobre aquesta imatge.

Per una àmplia classe de senyals, la propietat que les funcions siguin de quadrat integrable Lebesgue es l'apropiada per definir l'espai on treballarem. Per fixar idees considerarem l'espai de Hilbert complex $L^2(\mathbb{R})$ en el que segueix encara que les idees que es descriuran s'apliquen amb poques o cap modificació al cas de funcions periòdiques o funcions de vàries variables.

La variable d'aquestes funcions l'anomenarem t pensant en el temps. El producte escalar de dues funcions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ el prenem

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)^* dt. \quad (7.1)$$

Quan el senyal l'estudiem a partir de $f(t)$ diem que estem en la "representació de temps". És possible estudiar el mateix senyal amb altres funcions relacionades amb $f(t)$ i, per tant, existeixen diferents representacions.

7.2 Representació de magnituds per operadors

Considerem ara la mesura de magnituds associades a un senyal donat per la funció $f(t)$. La funció $|f(t)|^2$ és positiva i integrable. Per tant

$$\varphi(t) = \|f\|^{-2} |f(t)|^2 \quad (7.2)$$

es pot interpretar com una densitat de probabilitat. Aquesta serà la mesura que utilitzarem. Donada una funció qualsevol $w(t)$ definim el seu valor esperat en l'estat f com

$$\langle w(t) \rangle_f = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\varphi(t) dt = \|f\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)|f(t)|^2 dt. \quad (7.3)$$

No totes les magnituds que ens interessa mesurar tenen la forma $w(t)$. Definim l'operador T a través de

$$(Tf)(t) = tf(t). \quad (7.4)$$

Una funció aplicada a l'operador, dona un nou operador: $(w(T)f)(t) = w(t)f(t)$. Ara diem que la magnitud que mesuravem abans correspon a l'operador $w(T)$ i notem que

$$\begin{aligned} \langle w(T) \rangle_f &= \|f\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)|f(t)|^2 dt = \|f\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)f(t)f(t)^* dt \\ &= \|f\|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} (w(T)f)(t)f(t)^* dt = \|f\|^{-2} \langle w(T)f, f \rangle. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Si A és un operador arbitrari, definim el seu valor esperat en l'estat f com

$$\langle A \rangle_f = \|f\|^{-2} \langle Af, f \rangle. \quad (7.6)$$

Seguint amb la interpretació probabilística definim la incertesa d'una magnitud com la seva desviació típica.

$$\Delta_f A = [\langle A^2 \rangle_f - \langle A \rangle_f^2]^{1/2}. \quad (7.7)$$

Exemple

Considerem un estat gaussià $f(t) = e^{-at^2}$ i calculem la seva incertesa temporal:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \\ (Tf, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} te^{-2at^2} dt = 0, \quad (T^2f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \end{aligned}$$

d'on $\langle T^2 \rangle_f = 1/(4a)$, $\langle T \rangle_f = 0$ i la incertesa val $\Delta_f T = 1/(2\sqrt{a})$.

Exercici: Demostrar que el pols quadrat $f(t) = K, 0 \leq t \leq t_0$ té incertesa temporal igual a $t_0/\sqrt{12}$.

7.3 La representació de freqüències

Ja hem dit que $f(t)$ correspon a la representació de temps. La representació de freqüències ve donada per la seva transformada de Fourier.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (7.8)$$

Com $\mathcal{F}[f] \equiv \hat{f}$ pertany a $L^2(\mathbb{R})$, podem aplicar-li totes les definicions anteriors. Així definim un operador freqüència W definit

$$W\hat{f}(\omega) = \omega\hat{f}(\omega). \quad (7.9)$$

Ara tenim definida la incertesa de la freqüència. Veiem com es pot calcular sense abandonar la representació de temps. Els fets a utilitzar són que la transformada de Fourier és (llevat d'un coeficient) una isometria

$$(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[f]) = 2\pi(f, f),$$

i que l'operador freqüència correspon a la derivada en representació de temps

$$\omega \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left[-j \frac{df}{dt}\right].$$

Així

$$(W \hat{f}, \hat{f}) = (\mathcal{F}\left[-j \frac{df}{dt}\right], \mathcal{F}[f]) = 2\pi\left(-j \frac{d}{dt} f, f\right).$$

Els factors 2π desapareixen al calcular els valors esperats i la conclusió és que, en representació de temps

$$W = -j \frac{d}{dt}. \quad (7.10)$$

Exemple

Tornem a la gaussiana anterior i calculem la incertesa de la freqüència.

$$(Wf, f) = -j \int_{-\infty}^{\infty} -2ate^{-2at^2} dt = 0,$$

$$(W^2 f, f) = - \int_{-\infty}^{\infty} (4a^2 t^2 - 2a) e^{-2at^2} dt = a \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

d'on $\langle W^2 \rangle_f = a$, $\langle W \rangle_f = 0$ i la incertesa val $\Delta_f W = \sqrt{a}$. Senyalem el fet que en aquest exemple

$$\Delta_f T \Delta_f W = \frac{1}{2}.$$

Exercici: L'adjunt d'un operador A és A^\dagger definit $(A^\dagger f, f) = (f, Af)$ per tota f . Un operador és autoadjunt si $A = A^\dagger$. Es comprova fàcilment que T i W són operadors autoadjunts. Demostrar que si A és autoadjunt $(A^2 f, f) = \|Af\|^2$.

7.4 El principi d'incertesa temps-freqüència

En certes aplicacions és convenient disposar de funcions f ben localitzades en el temps i en la freqüència. Això vol dir que $\Delta_f T$ i $\Delta_f W$ siguin petits. Hi ha una limitació fonamental per aconseguir això. Per qualsevol estat f

$$\Delta_f T \Delta_f W \geq \frac{1}{2}. \quad (7.11)$$

Aquesta relació es coneix com principi d'incertesa temps-freqüència. En l'exemple anterior hem vist que les gaussianes assoleixen el signe igual en (7.11).

Exercici: Calcular la incertesa en freqüència del pols quadrat del problema anterior (utilitzant la transformada de Fourier). El resultat és infinit. El motiu és la discontinuïtat de $f(t)$. Una discontinuïtat és una propietat relevant que passa en un punt (amplada temporal zero) y calen freqüències arbitràriament elevades per descriure-la.

7.5 Principi d'incertesa general

Per operadors autoadjunts

$$(\Delta_f A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle_f)^2 \rangle_f = \|f\|^{-2} \|(A - \langle A \rangle_f)f\|^2.$$

Donats X i Y operadors autoadjunts i λ un paràmetre real, és evident que

$$\|Xf + j\lambda Yf\|^2 \geq 0.$$

Desarrollant la norma anterior trobem

$$\|Xf\|^2 + j\lambda\{(Yf, Xf) - (Xf, Yf)\} + \lambda^2\|Yf\|^2 \geq 0.$$

$$\|Xf\|^2 + \lambda(j[X, Y]f, f) + \lambda^2\|Yf\|^2 \geq 0,$$

on hem introduït el commutador $[X, Y] = XY - YX$. Com la relació anterior val per tot λ , el discriminant de l'equació ha de ser negatiu

$$(j[X, Y]f, f)^2 - 4\|Xf\|^2\|Yf\|^2 \leq 0.$$

d'on

$$\|Xf\|\|Yf\| \geq \frac{1}{2}|(j[X, Y]f, f)|$$

Ara, donats dos operadors autoadjunts A i B podem prendre $X = A - \langle A \rangle_f$ i $Y = B - \langle B \rangle_f$. Notem que $[X, Y] = [A, B]$, $\|Xf\| = \|f\|\Delta_f A$, $\|Yf\| = \|f\|\Delta_f B$ i $|(j[X, Y]f, f)| = \|f\|^2 |j[A, B] \rangle_f|$. Així arribem al principi general d'incertesa

$$\Delta_f A \Delta_f B \geq \frac{1}{2} |j[A, B] \rangle_f|. \quad (7.12)$$

En aquest resultat veiem que no es poden reduir arbitràriament les incerteses de dues magnituds que no commutïn.

Apliquem aquest principi al cas temps-freqüència. Trobem el commutador

$$[T, W]f(t) = (TWf)(t) - (WTf)(t) = t(-j)\frac{d}{dt}f(t) - (-j)\frac{d}{dt}(tf(t)) = -jf(t).$$

Per tant

$$j[T, W] = 1 \quad (7.13)$$

i $|j[A, B] \rangle_f| = 1$. Així (7.12) es converteix en (7.11).

7.6 El principi d'incertesa en física quàntica

L'energia d'un fotó de freqüència ν és $E = h\nu$ on h és la constant de Plank. Podem posar $E = \hbar\omega$ on $\hbar = h/(2\pi)$ és la constant reduïda de Plank ($\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} J \cdot s$). La incertesa en la freqüència es tradueix immediatament en incertesa en l'energia. El principi d'incertesa temps-energia és

$$\Delta_f T \Delta_f E \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (7.14)$$

7.7 Interpretació

Des del punt de vista físic el principi d'incertesa s'interpreta com la impossibilitat de mesurar simultàniament dues magnituds que no conmutin (temps i energia o posició i velocitat). Una conseqüència és que mesurar a escales petites requereix energies altes. Així la física de partícules elementals és la física d'altres energies. Igualment es conclou que les partícules de masses (energies) elevades tenen vides curtes.

En enginyeria tenim interpretacions similars. Per descriure un senyal amb bona resolució cal un ample de banda gran. El millorar, per exemple, el nombre de línies horitzontals (la resolució) en televisió implica treballar amb freqüències més altes.

Apèndix A

Notació i alguns resultats bàsics

A.1 Espais de Hilbert

L'objecte principal en el nostre anàlisi és el que anomenem *senyal*. Aquest sol representar un fragment de realitat a través de funcions. Com a cas genèric considerem funcions f d'una variable que denotem t ja que la dependència temporal és habitual en les aplicacions. Aquestes funcions prenen valors $f(t)$ complexos ja que moltes vegades descriuen fenòmens oscil·lants. L'estructura matemàtica convenient per l'anàlisi d'aquestes funcions és la d'*espai de Hilbert*. Tenim una estructura d'espai vectorial ja que podem combinar linealment aquestes funcions i una estructura mètrica que prové del *producte escalar*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)^* dt. \quad (\text{A.1})$$

on l'asterisc denota la conjugació complexa ¹. La norma d'una funció és

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \quad (\text{A.2})$$

Les anteriors fórmules es generalitzen fàcilment al cas de funcions de vàries variables.

La integració anterior és la de Lebesgue. En la pràctica els càlculs es redueixen a les habituals integrals de Riemann. Funcions que difereixin en un conjunt de mesura nul·la es consideren la mateixa funció. Les funcions per les quals la norma (A.2) és finita constitueixen l'espai de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Una *base ortonormal* és un conjunt de funcions $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R})$ on n és un índex numerable que verifiquen la condició de ser ortogonals dos a dos i de norma 1:

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{m,n} \quad (\text{A.3})$$

on la *delta de Kronecker* és

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

i la condició de poder expandir qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f(t) = \sum_n c_n \varphi_n(t) \quad (\text{A.5})$$

¹A vegades es defineix el producte conjugant la primera funció. Algunes fórmules es veuen llavors modificades.

on els coeficients venen donats per

$$c_n = (f, \varphi_n). \quad (\text{A.6})$$

Recordem la *igualtat de parseval*

$$\|f\|^2 = \sum_n |c_n|^2. \quad (\text{A.7})$$

La *funció característica* de un conjunt $A \subset \mathbb{R}$ s'indica $1_A(t)$ i val 1 si $t \in A$ i 0 en cas contrari. La *transformada de Fourier* de la funció $f(t)$ és

$$\mathcal{F}[f] = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

El *producte de convolució*

$$(f * g)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)dx,$$

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega), \quad \mathcal{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega).$$

Delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) = f(a),$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)] = e^{-j\omega a}, \quad \delta(t-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega.$$

Funció sinc

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \mathcal{F}\left[\frac{a}{\pi}\text{sinc}(at)\right] = 1_{[-a,a]}.$$

Fórmula de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right).$$

DEM: Definim la funció $\varphi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\alpha)$. Es comprova immediatament que és periòdica i, per tant, es pot representar en sèrie de Fourier:

$$\varphi(\omega) = \sum_n c_n e^{-j\frac{2\pi n\omega}{\alpha}},$$

$$c_n = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \varphi(\omega) e^{j\frac{2\pi n\omega}{\alpha}} d\omega = \sum_k \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \delta(\omega - k\alpha) e^{j\frac{2\pi n\omega}{\alpha}} d\omega = \frac{1}{\alpha}$$

ja que només la integral amb $k = 0$ és no nul·la. Posant $\alpha = 2\pi/T$ queda demostrada la igualtat.



A.2 Subespais de un espai de Hilbert

Subespais

Donat un espai de Hilbert \mathcal{H} un subespai és un subconjunt $V \subset \mathcal{H}$ tancat sota la suma i el producte per escalars:

- (1) $x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$,
- (2) $x \in V, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda x \in V$.

Dos subespais trivials són el propi \mathcal{H} i el format només pel vector nul $\{0\}$.

Recordem que un espai de Hilbert ha de ser complet, és a dir, tota successió de Cauchy ha de tenir límit. En quant a espai vectorial tot subespai és per si mateix un espai vectorial. En el cas hilbertià un subespai només és un espai de Hilbert si és complet. Per això és suficient que sigui tancat (que contingui els seus punts d'acumulació.)

A partir de qualsevol subespai V es pot fer una mínima extensió que el completa. El resultat és la seva adherència \bar{V} (V junt als seus punts d'acumulació.)

Suma d'espais

Dos espais U, V són *ortogonals* si ho són els seus vectors (escrivim $U \perp V$):

$$x \in U, y \in V \Rightarrow (x, y) = 0. \quad (\text{A.8})$$

La suma de dos subespais és un nou subespai

$$U + V = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}. \quad (\text{A.9})$$

Una manera habitual de obtenir la suma és generar-la a partir de la unió de dues bases dels respectius espais.

Tot tipus d'anàlisi implica descomposar l'espai total en suma de blocs independents $\mathcal{H} = U + V$. Perque la descomposició tingui interès tot vector $x \in \mathcal{H}$ s'ha d'escriure $x = x_1 + x_2$ amb $x_1 \in U, x_2 \in V$ de manera única. En aquest cas s'escriu $\mathcal{H} = U \oplus V$ i es parla de *suma directa*. Això implica, en particular, que $U \cap V = \{0\}$. Un cas important en que les sumes són directes és quant els dos subespais són ortogonals.

Donats dos subespais ortogonals U, V la seva suma és un nou subespai $U \oplus V$ que se sol obtenir amb una base donada per la unió de bases de U i V respectivament. Tot vector $x \in U \oplus V$ descomposa $x = x_1 + x_2$ amb $x_1 \in U, x_2 \in V$ donats per les respectives projeccions ortogonals sobre els dos espais. Per exemple, $x_1 = P_U x$. Recordem que si $\{u_n\}$ és una base ortonormal de U

$$P_U x = \sum_n c_n u_n, \quad \text{amb} \quad c_n = (x, u_n). \quad (\text{A.10})$$

Si el subespai $V \subset U$ llavors queda determinat de manera única $W \subset U$ tal que $U = V \oplus W$. Diem que W és el complement ortogonal de V en U . W es pot calcular imposant la condició d'ortogonalitat dels vectors de U amb cadascun dels elements d'una base de V (conjunt d'equacions lineals).

Exemple

En $L^2([-\pi, \pi])$ considerem els subespais $\mathcal{C} = \{\text{funcions constants } (f(t) = k)\}$, $\mathcal{P} = \{\text{funcions parells } (f(-t) = f(t))\}$, $\mathcal{S} = \{\text{funcions senars } (f(-t) = -f(t))\}$. És evident que \mathcal{C} és de dimensió 1 amb una base donada per $\{1\}$. \mathcal{P} i \mathcal{S} són de dimensió infinita amb bases que poden ser els cosinus o

els sinus de la base de Fourier, respectivament. És fàcil veure que $\mathcal{P} \perp \mathcal{S}$ i $L^2([-\pi, \pi]) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{S}$. A part de les projeccions amb les bases de sinus i cosinus és directe obtenir $P_{\mathcal{P}}f(t) = (f(t) + f(-t))/2$ i $P_{\mathcal{S}}f(t) = (f(t) - f(-t))/2$.

També tenim $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$. El complement ortogonal de \mathcal{C} en \mathcal{P} són les funcions parells tals que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0.$$

Diguem \mathcal{P}_0 a aquest espai. Ara podem considerar la descomposició

$$L^2([-\pi, \pi]) = \mathcal{C} \oplus \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{S}$$

que correspon a dir que tenim una base ortonormal de l'espai total de la forma $\{1\} \cup \{\cos(nt)\}_{n \geq 1} \cup \{\sin(nt)\}_{n \geq 1}$.

Producte directe d'espais

Els espais vectorials \mathbb{R}^n o $L^2(\mathbb{R})$ són espais d'objectes que depenen d'un paràmetre. En el primer cas els vectors són $x_i, i = 1, \dots, n$ i en el segon $f(t), t \in \mathbb{R}$. Aquest paràmetre i o t és unidimensional. Per descriure estructures de dimensió superior com són les imatges calen vectors dependents de dos o més paràmetres $x_{i,j}$ o $f(x, y)$. El primer correspon a un espai de matrius $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i el segon a $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'operació de producte directe permet relacionar aquest espais amb els primers traslladant l'anàlisi que s'hagi pogut fer d'aquests.

Per exemple, tenim que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$. L'operació \otimes (producte directe o tensorial) es defineix de la següent manera: si $x, y \in \mathbb{R}^n$ llavors $x \otimes y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i

$$(x \otimes y)_{i,j} = x_i y_j.$$

En termes matricials vol dir multiplicar un vector columna per un vector fila. Per exemple, si $x = (2, 3), y = (4, -5)$, $x \otimes y$ és la matriu

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4, -5) = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 12 & -15 \end{pmatrix}.$$

L'espai producte s'obté fent combinacions lineals arbitràries de productes de vectors.

En el cas de funcions, $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$ i

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

L'espai $L^2(\mathbb{R}^2)$ és l'adherència del generat pels anteriors productes.

En general, si l'espai E té la base $\{e_m\}$ i l'espai F té la base $\{f_n\}$, l'espai $E \otimes F$ admet la base $\{e_m \otimes f_n\}$. (En dimensió finita $\dim E \otimes F = \dim E \dim F$.) Aquest procediment és l'usat per estendre l'anàlisi de Fourier unidimensional al cas bidimensional. Si la base unidimensional és $\{e^{jnt}\}$, la base bidimensional és $\{e^{j(mx+ny)}\}$. En efecte si posem $f_n(t) = e^{jnt}$ llavors $(f_m \otimes f_n)(x, y) = f_m(x)f_n(y) = e^{jmx}e^{jny} = e^{j(mx+ny)}$.

Els productes escalars que puguin estar definits en els espais que multipliquem n'indueixen un en l'espai producte a través de la linealitat i

$$(f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2) = (f_1, f_2)(g_1, g_2).$$

Finalment, si hem descomposat ortogonalment un espai de Hilbert $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$, de les propietats de linealitat dels productes directes és fàcil deduir

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha, \beta} V_{\alpha} \otimes V_{\beta}.$$

Per exemple, les funcions d'una variable descomposen en suma de funció parell més funció senar. Llavors les funcions de dues variables descomposen en quatre classes $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) + f_4(x, y)$ amb $f_1(s_1x, s_2y) = f_1(x, y)$, $f_2(s_1x, s_2y) = s_1f_2(x, y)$, $f_3(s_1x, s_2y) = s_2f_3(x, y)$ i $f_4(s_1x, s_2y) = s_1s_2f_4(x, y)$ per $s_1, s_2 = \pm 1$.