

Probabilitat i Processos Estocàstics

EXERCICIS

J. M. Aroca
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

Febrer de 2012

EXERCICIS

1. Demostreu les fórmules A.12 de l'apèndix A, fent ús de taules de veritat.
2. Una xifra és un valor del conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considereu el conjunt de nombres de tres xifres (admetent zeros a l'esquerra).
 - (a) Quants n'hi ha?
 - (b) Quants d'aquests tenen les xifres diferents?
 - (c) Quants les tres xifres iguals?
 - (d) Quants tenen alguna xifra repetida?
3. Calculeu $\binom{7}{4}$ amb el triangle de Tartaglia.
4. Es llancen dos daus. Calculeu les següents probabilitats:
 - (a) Que treguin el mateix resultat.
 - (b) Que algun surti parell.
 - (c) Que la suma dels dos valgui 5.
 - (d) Que no surti ningun u.
 - (e) Que surti exactament un tres.
 - (f) Que surti algun tres.
 - (g) Que surtin dos tresos.
5. Obteniu la fórmula del binomi de Newton per $(x + y)^n$ de manera similar a com es fa als apunts.
6. Calculeu els nombres combinatoris de la forma $\binom{6}{k}$, $k = 0, 1, \dots, 6$.

(a) Què val $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k}$?

(b) Què valen $\sum_{k \text{ parell}} \binom{6}{k}$ i $\sum_{k \text{ senar}} \binom{6}{k}$?

(c) Demostreu que, per a tot n , $\sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Indicació: Considereu $(1 - 1)^n$.

7. Seleccionem 5 elements ordenats, sense repetició, dins el conjunt $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Quantes tries podem fer?
 - En quantes d'aquestes no hi és present el 3?
 - Quina és la probabilitat que al fer l'anterior selecció a l'atzar hi sigui present el 3?
8. Quin error, en tant per cent, es comet a l'aproximar $15!$ amb la fórmula d'Stirling?
9. Al nostre bar tenim 7 licors forts, 5 licors suaus i 4 refrescs. Quants cocktails podem preparar que continguin:
- Dos licors forts i dos licors suaus?
 - Un refresc, 3 licors suaus i un de fort?
 - Un refresc i dos licors?
10. Volem formar una contrasenya amb 5 lletres de l'alfabet de 26 lletres. Quantes possibilitats tenim si:
- Les lletres han de ser diferents?
 - Les lletres poden estar repetides?
 - Han de seguir el patró consonant-vocal-consonant-vocal-consonant, sense repeticions?
 - Com l'anterior apartat però amb possibles repeticions?
11. S'extreu una carta d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{És un as}\}$ i $B = \{\text{És de cors}\}$ calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ i $P(\overline{B})$.
12. Demostreu que per a tot parell d'esdeveniments A, B es verifica:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 1 + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

13. S'extreuen dues cartes (sense reemplaçament) d'una baralla francesa (52 cartes). Donats els esdeveniments $A = \{\text{Surt algun as}\}$ i $B = \{\text{Surt alguna carta de cors}\}$ calculeu les probabilitats $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.
- Indicació: Utilitzeu la fórmula de l'exercici anterior per a calcular $P(A \cap B)$.*
14. Són independents els esdeveniments A, B del problema 11? I els del problema 13?
15. Una casa té dos pisos amb tres portes cadascun. Tenim un clauer amb la clau de cada porta més dues claus mestres que obren totes les portes de cada pis respectivament, més una clau "supermestra" que obre totes les portes de la casa.
- Triem una clau a l'atzar i la provem en una porta. Quina és la probabilitat que s'obri?
 - Si l'anterior porta s'obra, quina és la probabilitat que haguem triat la clau "supermestra"?
 - Triem una clau a l'atzar i la provem en dues portes del primer pis sense poder-les obrir. Quina és la probabilitat que aquesta clau permeti obrir la primera porta del segon pis?
16. Juguem a una loteria de 100 números.
- Quina és la probabilitat que ens toqui alguna vegada si juguem 50 vegades?
 - Quantes vegades hem de jugar perquè la probabilitat que ens toqui alguna vegada valgui 0,5?

17. Es tiren dos daus. Calculeu la funció de probabilitat de la variable aleatòria X donada per la suma dels dos resultats.
18. Per les següents variables aleatòries, digueu de quin tipus són (binomial, etc) especificant els seus paràmetres i calculeu $P(X=4)$.
- Es llancen 10 monedes. X és el nombre de cares.
 - S'extreu una carta, amb reemplaçament, d'una baralla de 52 cartes fins que surt un as. X és el nombre d'extraccions que fem.
 - Una centraleta rep trucades a un ritme mitjà d'una per minut. X és el nombre de trucades rebudes durant 5 minuts.
 - Juguem cada dia un número a una loteria de 1000 números. X és el nombre de vegades que ens toca el premi durant un any.
19. Una variable aleatòria X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x < -1$, $F(x) = \frac{1}{3}$ per $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \frac{1}{2}$ per $0 \leq x < 2$ i $F(x) = 1$ per $x \geq 2$.
- Dibuixeu-la. És una variable discreta, contínua o mixta?
 - Calculeu $P(X = -2)$, $P(X = -1)$, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(0 \leq X \leq 2)$ i $P(0 < X < 2)$.
 - Doneu la seva funció de probabilitat.
20. Una variable aleatòria X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x < 1$ i $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ per $x \geq 1$.
- Dibuixeu-la. És una variable discreta, contínua o mixta?
 - Calculeu $P(X=2)$ i $P(2 < X < 3)$.
 - Doneu la seva funció de densitat.
21. Per a les següents variables aleatòries contínues, calculeu $P(2 < X < 3)$.
- Uniforme en $[0, 4]$.
 - Uniforme en $[0, 2]$.
 - Uniforme en $[-1, \frac{5}{2}]$.
 - Exponencial amb $\lambda = \frac{1}{2}$.
 - Gaussiana amb $m = 2$ i $\sigma = 2$.
22. Donada una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$:
- Calculeu $P(|X - 1| \geq 3)$ i compareu el resultat amb la fita que dona Txebyshev.
 - Trobeu $f_X(x | X \leq 1)$.
 - Calculeu $E[X | X \leq 1]$.
 - Trobeu la densitat de la variable $Y = e^X$.
 - Calculeu la variància de la variable $Z = X^2$.

23. Donada una variable aleatòria normal, que satisfà $P(X \leq 15) = 0,1$ i $P(X \leq 20) = 0,95$, trobeu:
- El valor de m i σ .
 - $P(X \leq 13)$.
 - $P(16 \leq X \leq 17)$.
 - El valor de k per tal que $P(X \leq k) = 0,05$.
 - El valor de j tal que $P(X > j) = 0,5$.

24. Una variable aleatòria contínua X té funció de distribució $F(x) = 0$ per $x \leq a$ i $F(x) = 1 - \frac{k}{x^b}$ per $x > a$, on a i b són constants positives. Trobeu:

- El valor de la constant k .
- La funció de densitat de X .
- $E[X]$, indicant per a quins valors de b existeix.
- $V[X]$, indicant per a quins valors de b existeix.

25. En la taula següent es dóna la funció de probabilitat conjunta per les variables X, Y :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	1/24	1/12	1/16	1/16
1	1/16	1/16	1/12	1/24
2	1/12	1/16	1/24	1/16
3	1/24	1/16	1/12	1/16

- Trobeu les funcions de probabilitat marginal de X i Y .
 - Trobeu $P(1 \leq X < 4, 0 \leq Y \leq 1)$.
 - Determineu si X i Y són independents.
26. Si X i Y tenen la funció de densitat conjunta $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ per $x \geq 0, y \geq 0$ i $f(x, y) = 0$ per els altres casos, i $U = \frac{X}{Y}, V = X + Y$:
- Trobeu la funció de densitat conjunta de U i V , indicant la seva regió de validesa.
 - Estudieu la independència de les variables (X, Y) .
 - Estudieu la independència de les variables (U, V) .
 - Sigui A l'esdeveniment $X + Y \leq 1$. Representeu-lo en l'espai (x, y) i calculeu la seva probabilitat utilitzant $f(x, y)$.
 - Representeu l'anterior esdeveniment A en l'espai (u, v) i calculeu de nou la seva probabilitat utilitzant $f(u, v)$.
27. Donades dos variables aleatòries independents X_1 i X_2 distribuïdes idènticament amb funció de densitat $f(t) = te^{-t}$ per $t \geq 0$ i 0 per $t < 0$, es demana trobar la funció de densitat de $Z = X_1 + X_2$.
28. Els dos costats d'un rectangle venen determinats per dues variables aleatòries independents uniformes: X en $[\frac{a}{2}, a]$ i Y en $[\frac{b}{3}, b]$, sent a i b paràmetres positius. Determineu-ne l'àrea mitjana.

29. Per la creació de barres d'acer utilitzem dos processos diferents que es comporten com VAs gaussianes. En el primer procés, la llargada mitjana de la barra és de 16,8 cm amb una desviació típica de 0,5 cm, i en el segon tenim una llargada mitjana de 16,2 cm i una desviació típica de 0,4 cm.
- Quina és la probabilitat de que triant una barra a l'atzar de cada procés tinguem una diferència en les longituds de menys de 0,9 cm?
 - Si en posem una de cada seguides, quina és la probabilitat de que la longitud total sigui més gran de 33,9 cm?
30. La funció de densitat conjunta de dos variables aleatòries X, Y és $f(x, y) = \frac{3}{5}x(x + y)$ per $0 < x < 1, 0 < y < 2$.
- Trobeu, utilitzant el teorema de l'esperança bidimensional $E[X], E[Y], E[X + Y]$ i $E[XY]$.
 - Es compleix $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$? i $E[XY] = E[X]E[Y]$? Expliqueu-ho.
31. La funció de densitat conjunta de dos variables aleatòries és $f(x, y) = c(2x + y)$ per $0 < x < 1, 0 < y < 2$. Trobeu:
- El valor de la constant c .
 - Les funcions de densitat marginal de X i de Y .
 - $P(X + Y \leq 1)$.
32. Els resultats de 10 alumnes en els respectius exàmens és el següent:
- | | | | | | | | | | | |
|-----------------------|---|---|---|----|---|---|----|---|---|---|
| Primer exàmen (X) | 6 | 5 | 8 | 8 | 7 | 6 | 10 | 4 | 9 | 7 |
| Segon exàmen (Y) | 8 | 7 | 7 | 10 | 5 | 8 | 10 | 6 | 8 | 6 |
| Tercer exàmen (Z) | 7 | 4 | 6 | 8 | 6 | 7 | 9 | 9 | 7 | 5 |
- Trobeu el vector d'esperances.
 - Trobeu la matriu de covariàncies.
33. Un canal de comunicació li suma al senyal transmès X un soroll N incorrelat amb X . En aquest punt multipliquem la sortida per una constant λ per corregir l'efecte, però tenint en compte que després el senyal es passarà per la xarxa sumant-li una distorsió μ coneguda deguda a la interferència de 220 volts. Trobeu el millor valor de λ en funció de μ si $m_X = m_N = 1, \sigma_X = 6$ i $\sigma_N = 2$.
34. Sigui X, Y variables aleatòries gaussianes $N(0, 1)$ independents i considerem la funció de pas $(r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)$. Es demana:
- La funció de densitat de la variable aleatòria $S = \frac{X+Y}{2}$. De quin tipus és?
 - La funció de densitat de la variable aleatòria conjunta (R, Θ) .
 - Les funcions de densitat de les variables aleatòries marginals R i Θ . De quin tipus són R i Θ ? Són independents?
35. La funció de densitat conjunta de dos variables aleatòries X, Y és $f(x, y) = A(x + y)$ per $0 < x < y < \sqrt{x}$. Calculeu:
- La constant A .
 - Les densitats marginals de X i de Y .
 - $E[Y|X = x]$.
 - La millor estimació de Y quan sabem que $X = \frac{1}{4}$.

SOLUCIONS

1. Si les proposicions $x \in A$ i $y \in B$ les anomenem p i q respectivament, $x \in \overline{A \cap B}$ correspon a $\neg(p \wedge q)$ i $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ correspon a $(\neg p) \vee (\neg q)$. Les taules de veritat es calculen fàcilment (per exemple $\neg(0 \wedge 0) = \neg 0 = 1$ i $(\neg 0) \vee (\neg 0) = 1 \vee 1 = 1$):

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	0	0

De la mateixa manera, $x \in \overline{A \cup B}$ correspon a $\neg(p \vee q)$ i $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ correspon a $(\neg p) \wedge (\neg q)$. Ara la taula és:

p	q	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	0	0

2. (a) 1000. (b) 720. (c) 10. (d) 280.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 2 \ 1 \\
 1 \ 3 \ 3 \ 1 \\
 1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1 \\
 1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1 \\
 1 \ 6 \ 15 \ 20 \ 15 \ 6 \ 1 \\
 1 \ 7 \ 21 \ 35 \ 35 \ 21 \ 7 \ 1
 \end{array}$$

3. 35, ja que:

$$5. (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

6. (a) Sumant la setena fila del triangle de Tartaglia: $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$. (b) $1 + 15 + 15 + 1 = 32$, $6 + 20 + 6 = 32$. (c) $2^n = (1+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} + \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k}$.

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k \text{ parell}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ senar}} \binom{n}{k}.$$

7. (a) 6720. (b) 2520. (c) $\frac{5}{8}$.

8. 0, 55%.

9. (a) 210. (b) 280. (c) 264.

10. (a) 7.893.600. (b) 11.881.376. (c) 159.600. (d) 231.525.

11. $P(A) = \frac{1}{13}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{13}$ i $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$.

12. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - (P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B})) = P(A) + P(B) - 1 + P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

13. $P(A) = \frac{33}{221}$, $P(B) = \frac{15}{34}$, $P(A \cap B) = \frac{29}{442}$ i $P(A \cup B) = \frac{116}{221}$.
14. Sí els del problema 11. No els del 13.
15. (a) $1/3$. (b) $1/3$. (c) $2/5$.
16. (a) 0, 395. (b) 69.
17. $\Omega_X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. $P_X(2) = P_X(12) = \frac{1}{36}$, $P_X(3) = P_X(11) = \frac{1}{18}$, $P_X(4) = P_X(10) = \frac{1}{12}$, $P_X(5) = P_X(9) = \frac{1}{9}$, $P_X(6) = P_X(8) = \frac{5}{36}$, $P_X(7) = \frac{1}{6}$.
18. (a) Binomial amb $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$, $P = 0, 205$. (b) Geomètrica amb $p = \frac{1}{13}$, $P = 0, 0605$. (c) Poisson amb $\alpha = 5$, $P = 0, 1754$. (d) Binomial amb $n = 365$, $p = \frac{1}{1000}$, $P = 0, 0005069$.
19. (a) Dicreta. (b) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 0$. (c) $\Omega_X = \{-1, 0, 2\}$. $P_X(-1) = \frac{1}{3}$, $P_X(0) = \frac{1}{6}$, $P_X(2) = \frac{1}{2}$.
20. (a) Contínua. (b) $0, \frac{19}{216}$. (c) $f(x) = 0$ per $x < 1$ i $f(x) = \frac{3}{x^4}$ per $x > 1$.
21. (a) $\frac{1}{4}$. (b) 0. (c) $\frac{1}{7}$. (d) 0,1447. (e) 0,1914.
22. (a) $P = e^{-4} = 0,018$. La fita és $\frac{1}{9} = 0,11$ (b) $f_X(x | X \leq 1) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, 0 \leq x \leq 1$. (c) $\frac{e-2}{e-1}$. (d) $f(y) = \frac{1}{y^2}, y \geq 1$. (e) 20.
23. (a) $m = 17,1896$, $\sigma = 1,7085$. (b) $P(X \leq 13) = 0,0071$. (c) $P(16 \leq X \leq 17) = 0,2126$. (d) $k = 14,3792$. (e) $j = m = 17,1896$.
24. (a) $k = a^b$. (b) $f(x) = ba^b x^{b-1}$ si $x > a$; 0 altrament. (c) $E[X] = \frac{ab}{b-1}$ $b > 1$. (d) $V[X] = \frac{a^2 b}{(b-2)(b-1)^2}$ $b > 2$.
25. (a) $P_X(0) = \frac{11}{48}$. $P_X(1) = \frac{13}{48}$. $P_X(2) = \frac{13}{48}$. $P_X(3) = \frac{11}{48}$. $P_Y(0) = \frac{1}{4}$. $P_Y(1) = \frac{1}{4}$. $P_Y(2) = \frac{1}{4}$. $P_Y(3) = \frac{1}{4}$. (b) $\frac{19}{48}$. (c) $P(x=0, y=0) = \frac{1}{24} \neq P(x=0)P(y=0) = \frac{11}{192}$. No són independents.
26. (a) $f_{UV}(u, v) = \frac{ve^{-v}}{(1+u)^2}$ per $u, v \geq 0$. (b) $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Són independents. (c) $f_{UV}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$. Són independents. (d) $P(X + Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1}$. (e) $P(V \leq 1) = 1 - 2e^{-1}$.
27. $f_Z(z) = \frac{z^3 e^{-z}}{6}$ per $z \geq 0$.
28. $E[A] = \frac{ab}{2}$.
29. (a) 0,6707. (b) 0,0799.
30. (a) $\frac{7}{10}$. (b) $\frac{6}{5}$. (c) $\frac{19}{10}$. (d) $\frac{5}{6}$. (e) L'esperança de la suma sempre és suma d'esperances. Com X i Y no són independents no té perquè ser $E(XY) = E(X)E(Y)$.
31. (a) $c = \frac{1}{4}$. (b) $f_X(x) = x + \frac{1}{2}$ per $0 < x < 1$. $f_Y(y) = \frac{1}{4}(y + 1)$ per $0 < y < 2$. (c) $\frac{1}{8}$
32. (a) (7, 7,5, 6,8). (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1,5 & 0,6 \\ 1,5 & 2,45 & 1,2 \\ 0,6 & 1,2 & 2,36 \end{pmatrix}$
33. $\lambda = \frac{37 - 2\mu}{44}$.
34. (a) $f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2}$. (b) $f(r, \theta) = \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2}$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (c) $f_R(r) = r e^{-\frac{1}{2}r^2}$, $r > 0$ (v.a. Rayleigh), $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $0 < \theta < 2\pi$ (v.a. uniforme).
35. (a) $A = \frac{20}{3}$. (b) $f_X(x) = \frac{10}{3}x(1 + 2\sqrt{x} - 3x)$, $0 < x < 1$ i $f_Y(y) = \frac{10}{3}y^2(3 - 2y - y^2)$, $0 < y < 1$. (c) $E[Y|x] = \frac{1}{3} \frac{3x + 2\sqrt{x} - 5x^2}{1 + 2\sqrt{x} - 3x}$, $E[Y|X = \frac{1}{4}] = \frac{23}{60}$.