

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial

21 de maig de 2015

1. Una variable bidimensional contínua (X, Y) té densitat conjunta:

$$f(x, y) = 8xy, \quad 0 < y < x < 1.$$

- (a) Calcula les densitats marginals de X i Y . Són X i Y independents?
- (b) Calcula la densitat de Y condicionada a X i l'esperança condicionada $E[Y|X=x]$.
- (c) Quina és la millor estimació possible del valor de Y si sabem que $X = \frac{1}{2}$? Compara aquest valor amb el que s'obtindria estimant Y per una constant. Sense fer més càlculs, què podem dir de la estimació lineal de Y donada X ?
2. El senyal que s'envia a un canal de comunicació, X , i el soroll afegit per aquest canal, Y , són variables aleatòries conjuntament gaussianes, amb $m_X = 10$, $m_Y = 2$, $\sigma_X = 2$, $\sigma_Y = 1$ i $\rho = \frac{1}{4}$.
- (a) Escribeu la densitat de la variable que dona la sortida del canal: $Z = X + Y$.
- (b) Calcula la millor estimació lineal homogènia de X donada Z , usant el principi d'ortogonalitat.
- (c) Troba el valor de la constant γ que fa que les variables Z i $T = X + \gamma Y$ siguin incorrelades. Podem dir llavors alguna cosa sobre la independència de Z i T ?
3. A una botiga, durant cert període de temps, poden entrar 0, 1 o 2 clients amb probabilitats 0,2, 0,5 i 0,3 respectivament. Cada client, independentment dels altres, pot realitzar una compra amb probabilitat 0,4. Considerem les variables $X =$ "nombre de clients", $Y =$ "nombre de compres".
- (a) Fes una taula amb la funció de probabilitat conjunta de (X, Y) . Calcula les funcions de probabilitat marginals de X i Y .
- (b) Calcula l'entropia de X i l'entropia de Y . Quina de les dues variables dona més informació sobre el resultat de l'experiment? Compara amb l'entropia de la variable conjunta (X, Y) . (Dóna els resultats en bits.)
- (c) Si codifiquem la variable Y assignant al valor 0 la paraula "1", al valor 1 la paraula "00" i al valor 2 la paraula "01", calcula el nombre mitjà de bits emprats en representar el resultat i compara amb l'entropia de Y .