ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **16 d'abril de 2015**

1. En una xarxa gran s'utilitzen dispositius interruptors que tallen el pas quan reben l'ordre. Pels dispositius correctes hi ha una probabilitat $p_c = 0{,}05$ de fallar (no tallar el pas al rebre l'ordre). Un 10% de la producció d'interruptors és defectuosa i té probabilitat de fallar $p_d = 0{,}15$.

   (a) Pels dispositius defectuosos calculeu la probabilitat de fallar si en posem dos en paral·lel. El mateix si en posem dos en sèrie. El mateix amb tres interruptors en paral·lel i en sèrie.

   (b) Triem un interruptor a l'atzar i el provem repetidament fins que falla. Si ha calgut fer 8 proves, quina és la probabilitat que l'interruptor sigui defectuós? Calculeu-ho també quan ha calgut fer 18 proves. Compareu aquests resultats amb la probabilitat a priori.

   (c) Una xarxa utilitza 30 interruptors. Quina és la probabilitat que almenys hi hagi 4 interruptors defectuosos? Compareu el resultat exacte (amb 5 decimals) amb el que s'obté aproximant amb una variable de Poisson.

   (d) Calculeu les esperances i desviacions de les següents variables: Nombre de proves amb un interruptor correcte fins que falla, nombre de proves amb un interruptor defectuós fins que falla, nombre d'interruptors defectuosos en una mostra de 30 interruptors.

   Solució:

   (a) La composició en paral·lel falla si falla algun. La composició en sèrie falla si fallen tots. Així:

   $P(\text{fallen dos en paral·lel}) = 1 - P(\text{funcionen els dos}) = 1 - 0{,}85^2 = 0{,}277$.

   $P(\text{fallen dos en sèrie}) = P(\text{fallen els dos}) = 0{,}15^2 = 0{,}022$.

   $P(\text{fallen tres en paral·lel}) = 1 - P(\text{funcionen els tres}) = 1 - 0{,}85^3 = 0{,}386$.

   $P(\text{fallen tres en sèrie}) = P(\text{fallen els tres}) = 0{,}15^3 = 0{,}0034$.

   (b) C = "correcte", D = "defectuós", N = proves fins que falla. Per Bayes:

$$P(D|N = 8) = \frac{P(N = 8|D)P(D)}{P(N = 8|C)P(C) + P(N = 8|D)P(D)}$$

$$= \frac{0{,}1(1 - p_d)^7 p_d}{0{,}9(1 - p_c)^7 p_c + 0{,}1(1 - p_d)^7 p_d} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}85^7 \cdot 0{,}15}{0{,}9 \cdot 0{,}95^7 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}85^7 \cdot 0{,}15} = 0{,}133.$$

   De forma similar s'obté $P(D|N = 18) = 0{,}048$. A priori, $P(D) = 0{,}1$. Com C triga més en fallar, una N prou alta afavoreix C. Una N petita afavoreix D però hi ha un balanç amb l'escassedat de Ds de manera que la probabilitat en el cas $N = 8$ no varia gaire respecte al valor a priori.

(c) El nombre X d'interruptors defectuosos és binomial amb $n = 30$, $p = 0{,}1$.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - 0{,}9^{30} - 30 \cdot 0{,}9^{29} 0{,}1 - \binom{30}{2} 0{,}9^{28} 0{,}1^2 - \binom{30}{3} 0{,}9^{27} 0{,}1^3 = 0{,}35256.$$

Aproximant a una Poisson de paràmetre $\alpha = np = 3$:

$$P(X \geq 4) \simeq 1 - e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} \right) = 0{,}35276.$$

L'aproximació és correcta fins al tercer decimal.

(d) Nombre de proves amb un interruptor correcte fins que falla: geomètrica de paràmetre p_c. Esperança $\dfrac{1}{p_c} = 20$. Desviació $\dfrac{\sqrt{1 - p_c}}{p_c} = 19{,}5$.

Nombre de proves amb un interruptor defectuós fins que falla: geomètrica de paràmetre p_d. Esperança $\dfrac{1}{p_d} = 6{,}7$. Desviació $\dfrac{\sqrt{1 - p_d}}{p_d} = 6{,}1$.

Nombre d'interruptors defectuosos en una mostra de 30 interruptors: binomial amb $n = 30$, $p = 0{,}1$. Esperança $np = 3$. Desviació $\sqrt{np(1 - p)} = 1{,}6$.

2. Un planeta esta rodejat d'asteroides. La distància d'aquests a la superfície del planeta es descriu amb una variable aleatòria X de densitat:

$$f_X(x) = Kx^2 e^{-ax}, \qquad x \geq 0.$$

on K i a són constants i treballem en unitats tals que el radi del planeta val 1.

(a) Calculeu els valors de K i a sabent que la distància mitjana dels asteroides a la superfície del planeta val 10.

(b) Calculeu la funció de distribució de X. Hi ha un total d'uns 10.000 asteroides i per establir un sistema de satèl·lits de comunicacions hem de treballar a una altura per sota de la qual no hi hagi més de 300 asteroides. Quina és la màxima altura que podem utilitzar?

(c) En les unitats apropiades, l'energia d'un asteroide és $W = \dfrac{20}{X}$. Calcula la densitat i l'esperança de W.

(d) Una nau es troba al planeta i fa un recorregut anant fins a distància 3 i tornant. Si xoca amb un asteroide, quina és la probabilitat que aquest tingui energia superior a 10?

Indicació: En l'apartat (b) considereu distàncies enteres i proveu valors.

Solució:

(a) $1 = \displaystyle\int_0^\infty Kx^2 e^{-ax} dx = K\frac{2}{a^3}$ d'on $K = \dfrac{a^3}{2}$.

$E[X] = \displaystyle\int_0^\infty x \cdot \frac{a^3}{2} x^2 e^{-ax} dx = \frac{a^3}{2}\frac{3!}{a^4} = \frac{3}{a}$. Llavors $10 = \dfrac{3}{a}$ d'on $a = 0{,}3$.

(b) $F_X(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{a^3}{2} t^2 e^{-at} dt = \frac{a^3}{2}\left[-\left(\frac{t^2}{a} + \frac{2t}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{-at}\right]_0^x = 1 - \left(\frac{a^2x^2}{2} + ax + 1\right)e^{-ax}$.

Volem $P(X < h) = \frac{300}{10000}$, és a dir $F_X(h) = 0{,}03$. Donant valors: $F_X(1) = 0{,}003$, $F_X(2) = 0{,}023$, $F_X(3) = 0{,}06$. Afinant una mica més $F_X(2{,}2) = 0{,}029$ i, per tant, $h \sim 2{,}2$.

(c) W varia entre 0 i infinit. La transformació té inversa $x = \dfrac{20}{w}$ i

$$f_W(w) = f_X(x)\frac{1}{|dw/dx|} = \frac{0,3^3}{2} x^2 e^{-0{,}3x} \frac{1}{20/x^2} = 108\frac{e^{-6/w}}{w^4}, \qquad w > 0.$$

Utilitzant el teorema de l'esperança:

$$E[W] = \int_0^\infty \frac{20}{x} \cdot \frac{a^3}{2} x^2 e^{-ax} dx = 20\frac{a^3}{2}\frac{1}{a^2} = 10a = 3.$$

(d) $W = \dfrac{20}{X} > 10 \Rightarrow X < 2$. Llavors ens demanen

$$P(X < 2 | X < 3) = \frac{P(X < 2)}{P(X < 3)} = \frac{F_X(2)}{F_X(3)} = 0{,}368.$$