ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **11 de desembre de 2014**

1. Una variable bidimensional continua (X, Y) tiene densidad conjunta:

$$f(x, y) = e^{-x}, \qquad 0 < y < x < \infty.$$

   (a) Calcula las densidades marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes?

   (b) Calcula las densidades de X condicionada a Y y de Y condicionada a X.

   (c) Calcula las esperanzas condicionadas $E[X|Y\!=\!y]$ y $E[Y|X\!=\!x]$.

   (d) ¿Cual es la mejor estimación posible del valor de X si sabemos que $Y\!=\!2$? Compara este valor con el que se obtendría estimando X por una constante.

   (e) Sin hacer cálculos, a partir del resultado del tercer apartado, ¿qué podemos decir de las estimaciones lineales de Y dada X y de X dada Y?

2. X e Y son variables aleatorias conjuntamente gaussianas, con $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ y $\rho = \frac{1}{2}$.

   (a) Calcula la esperanza y la desviación de la variable $Z = \dfrac{X+Y}{2}$. Compara estos valores con los que obtendríamos si X e Y fueran independientes.

   (b) Calcula la mejor estimación lineal no homogénea de X dada Z, usando el principio de ortogonalidad.

   (c) Escribe la densidad conjunta de la variable bidimensional (X, Y). Obtén la densidad en coordenadas polares (r, θ). Calcula la densidad marginal de θ.

3. Una variable aleatoria toma valores $1, 2, 3$ con igual probabilidad. Obtenemos dos valores independientes de esta variable y consideramos las variables X = "primer resultado", Y = "suma de los dos resultados".

   (a) Haz una tabla con la función de probabilidad conjunta de (X, Y). Obtén las funciones de probabilidad marginales de X e Y.

   (b) Calcula la entropía de X y la entropía de Y. ¿Cual de las dos variables da más información sobre el resultado del experimento? ¿Cuantos bits de más? Compara con la entropía de la variable conjunta (X, Y).