ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **4 de novembre de 2014**

1. El acceso a un sistema informático se hace mediante una palabra clave fijada por el sistema. La clave consiste en una secuencia de 10 letras tomadas, con repetición, en el conjunto $\{a, b, c\}$. Cuando un usuario introduce una clave de este tipo, consigue acceso total si tiene 8 o más letras correctas o acceso limitado si tiene 6 o 7 letras correctas. Con menos letras correctas se deniega el acceso.

   (a) Un usuario introduce una clave al azar. Calcula las probabilidades de cada tipo de acceso.

   (b) Si un usuario está dentro del sistema, ¿qué probabilidad hay de que esté con acceso total?

   (c) Desde una dirección determinada, el sistema permite hasta 10 intentos de acceso antes de bloquear la dirección. ¿Que probabilidad tiene un usuario de acceder si no conoce la clave y las introduce al azar?

   (d) En la cuestión anterior, si no se limita el número de intentos, ¿cual es el valor medio y la desviación estandard del número de intentos necesarios para acceder al sistema?

   (e) Un hacker consigue descubrir el número de a's, de b's y de c's en la clave de acceso. Si estos valores son n_a, n_b, n_c, calcula la probabilidad que tiene este hacker de acertar la palabra clave (si hace una elección al azar compatible con la información que tiene). Compara su valor para $n_a = 4, n_b = 3, n_c = 3$ con la probabilidad de acertar la clave introduciendo las letras totalmente al azar

   Solución:

   (a) El número de letras correctas, X, es una variable binomial con $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$. Denotamos $T =$ "Acceso total", $L =$ "Acceso limitado".

$$P(T) = P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$$

$$= \binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{201}{3^{10}} = 0{,}0034.$$

$$P(L) = P(X=6)+P(X=7) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4320}{3^{10}} = 0{,}073.$$

   (b)

$$P(T|T \cup L) = \frac{P(T)}{P(T \cup L)} = \frac{P(T)}{P(T) + P(L)} = \frac{201}{201 + 4320} = 0{,}044.$$

   (c) Si $A =$ "Acceso", $P(A) = P(T) + P(L) = 0{,}07656$.

$$P(\text{Acceder en alguno de 10 intentos}) = 1 - P(\text{No acceder en niguno de 10 intentos})$$

$$= 1 - P(\overline{A})^{10} = 1 - 0{,}9234^{10} = 0{,}55.$$

(d) El número N de intentos necesarios es una variable geométrica de parámetro $p = P(A)$. $E[N] = \dfrac{1}{p} = 13$, $V[N] = \dfrac{q}{p^2} = 157{,}5$ de donde $\sigma_N = 12{,}5$.

(e) La probabilidad de acertar entrando todas las letras al azar es $P_0 = \dfrac{1}{3^{10}} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$.

Si sabemos el número de letras de cada tipo, ponemos las n_a a's en posiciones al azar. La probabilidad de acertar las posiciones correctas es:

$$\frac{1}{\binom{10}{n_a}}$$

Ahora, ponemos las n_b b's en las restantes $10 - n_a$ posiciones. La probabilidad de hacerlo correctamente es:

$$\frac{1}{\binom{10-n_a}{n_b}}$$

En este caso ya tendríamos la palabra correcta, así que la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{\binom{10}{n_a}} \cdot \frac{1}{\binom{10-n_a}{n_b}} = \frac{n_a! n_b! n_c!}{10!}.$$

En el caso $n_a = 4, n_b = 3, n_c = 3$, $P = \frac{4!3!3!}{10!} = \frac{1}{4200} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$, sensiblemente mayor que P_0.

2. Dados $a, b > 0$ decimos que X es una variable aleatoria de Pareto ($X \sim \text{Pareto}(a, b)$) si su función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - \frac{a^b}{x^b}, \qquad x \geq a.$$

   (a) A una línea de comunicación llegan perturbaciones de energia $X \sim \text{Pareto}(1, 4)$. Calcula la probabilidad que en una secuencia de 20 perturbaciones independientes haya alguna con energia mayor que 6.

   (b) Con las perturbaciones anteriores la línea puede interrumpirse con probabilidad 0,05 si $X < 6$, y probabilidad 1 si $X > 6$. Si la línea se interrumpe, cual es la probabilidad que haya sido por una perturbación con $X < 6$? Comparad con la probabilidad a priori.

   (c) Calcula la función de densidad y la esperanza de una variable X de Pareto en función de a y b, indicando para que valores de b es $\overline{X}$ finita. Calcula la esperanza y la desviación estándard de una variable $X \sim \text{Pareto}(1, 5)$.

   (d) Dada $X \sim \text{Pareto}(2, 3)$ calcula la densidad y la esperanza de la variable $Y = \ln X$.

Solución:

(a) $F_X(x) = 1 - \dfrac{1}{x^4}$, para $x > 1$.

$P(\text{Alguna energía mayor que } 6) = 1 - P(\text{Todas las energías menores que } 6) = 1 - F_X(6)^{20} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{6^4}\right)^{20} = 0{,}015$.

(b) I = "Interrupción de la línea", $P(I|X < 6) = 0{,}05$, $P(I|X > 6) = 1$. Por Bayes:

$$P(X < 6|I) = \frac{P(I|X < 6)P(X < 6)}{P(I|X < 6)P(X < 6) + P(I|X > 6)P(X > 6)}$$

$$= \frac{0{,}05(1 - \frac{1}{6^4})}{0{,}05(1 - \frac{1}{6^4}) + 1 \cdot \frac{1}{6^4}} = 0{,}984.$$

A priori, $P(X < 6) = 1 - \frac{1}{6^4} = 0{,}99922$. La probabilidad ha disminuído ya que la interrupción es más probable cuando $X > 6$.

(c)

$$f_X(x) = F'_X(x) = b\frac{a^b}{x^{b+1}}, \qquad x > a$$

$$E[x] = \int_a^\infty xb\frac{a^b}{x^{b+1}}dx = ba^b \int_a^\infty \frac{dx}{x^b} = ba^b \left[\frac{x^{-b+1}}{-b+1}\right]_a^\infty = \frac{ba}{b-1}.$$

si $b > 1$. $E[X] = \infty$ para $b \leq 1$.

Para $X \sim$ Pareto$(1,5)$, $f_X(x) = \left(1 - \frac{1}{x^5}\right)' = \frac{5}{x^6}$ para $x > 1$.

$$E[X] = \int_1^\infty x\frac{5}{x^6}dx = 5\int_1^\infty \frac{dx}{x^5} = 5\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^\infty = \frac{5}{4}.$$

$$E[X^2] = \int_1^\infty x^2\frac{5}{x^6}dx = 5\int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = 5\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^\infty = \frac{5}{3}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \sqrt{\frac{5}{3} - \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{48}} = 0{,}32.$$

(d) $f_X(x) = \dfrac{24}{x^4}$, $x > 2$. La transformación $y = \ln x$ es creciente con valores de $\ln 2$ a ∞.

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{1}{|dy/dx|} = \frac{24}{x^4}\frac{1}{1/x} = \frac{24}{x^3} = 24e^{-3y}, \qquad y > \ln 2.$$

$$E[Y] = \int_{\ln 2}^\infty y24e^{-3y}dy = 24\left[-\left(\frac{y}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{-3y}\right]_{\ln 2}^\infty = \ln 2 + \frac{1}{3}.$$