ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **12 de novembre de 2013**

1. Un centre de recerca espacial rep senyals de deu satèl·lits. D'aquests, tres són ràpids i set són lents. En els ràpids, un senyal triga en enviar-se 1 segon amb probabilitat 2/3 i 2 segons amb probabilitat 1/3. En els lents, el senyal triga en enviar-se 2 segons amb probabilitat 1/3 i 3 segons amb probabilitat 2/3.

   (a) Es tria un satèl·lit a l'atzar i s'envia el senyal. Quin és el temps mitjà que triga en arribar?

   (b) Es trien dos satèl·lits diferents a l'atzar i és considera el mínim dels dos temps de transmissió (T_m). Calcula la probabilitat que $T_m = 2$.

   (c) Si $T_m = 2$, quina és la probabilitat que haguem triat dos satèl·lits ràpids? Compara amb el seu valor a priori.

   (d) Si, de manera independent, cada dia durant 10 dies es tria un satèlit a l'atzar i es transmet el senyal, quina és la probabilitat que el temps de transmissió valgui 1 segon en tres o més dies?

Solució:

(a)

$$\begin{aligned}\overline{T} &= E[T|R]P(R) + E[T|L]P(L)\\ &= (1\cdot P(T{=}1|R) + 2\cdot P(T{=}2|R))\frac{3}{10} + (2\cdot P(T{=}2|L) + 3\cdot P(T{=}3|L))\frac{7}{10}\\ &= \left(1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3}\right)\frac{3}{10} + \left(2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{7}{10} = \frac{34}{15} = 2{,}27.\end{aligned}$$

(b) Tenim $P(RR) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{15}$, $P(RL) = \dfrac{3\cdot 7}{\binom{10}{2}} = \dfrac{7}{15}$, $P(LL) = \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{7}{15}$.

$$\begin{aligned}P(T_m{=}2) &= P(T_m{=}2|RR)P(RR) + P(T_m{=}2|RL)P(RL) + P(T_m{=}2|LL)P(LL)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{15} + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\frac{7}{15} = \frac{19}{45} = 0{,}4222.\end{aligned}$$

(c)

$$P(RR|T_m{=}2) = \frac{P(T_m{=}2|RR)P(RR)}{P(T_m{=}2)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{15}}{\frac{19}{45}} = \frac{1}{57} = 0{,}017.$$

A priori, $P(RR) = \frac{1}{15} = 0{,}066$ era més gran ja que en RR és més probable el cas $T_m{=}1$.

(d) El nombre de dies amb $T{=}1$ és binomial amb $n = 10$ i $p = P(T{=}1) = \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{5}$.

$$P(N \geq 3) = 1 - P(N{=}0) - P(N{=}1) - P(N{=}2)$$

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} - 10\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^9 - \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 0{,}3222.$$

2. En l'accés a una xarxa de comunicació els usuaris pateixen un temps d'espera T donat per una variable aleatòria amb funció de distribució

$$F_T(t) = 1 - e^{-\alpha\sqrt{t}}, \qquad t \geq 0,$$

on t s'expressa en segons i α és un paràmetre positiu.

(a) Determina el valor de α sabent que en 10.000 usuaris n'hi ha 18 que s'esperen més de 10 segons.

(b) Troba la funció de densitat, l'esperança i la desviació de la variable T.

(c) Troba la funció de densitat de la variable $Z = \sqrt{T}$. De quin tipus de variable es tracta? Quin és el seu valor mitjà?

(d) La tarifa per connexió és Z on

$$Z = \begin{cases} 3(1-T) & \text{si } T < 1 \\ 0 & \text{si } T \geq 1 \end{cases}$$

Calcula el valor mitjà de la variable Z i la seva funció de distribució. Es tracta d'una variable contínua?

Indicació: Arrodoneix el valor de α obtingut en el primer apartat per utilitzar-lo en els altres apartats.

Solució:

(a) $\frac{18}{10.000} = P(T > 10) = 1 - F_T(10) = e^{-\alpha\sqrt{10}}$, d'on $\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \ln 0{,}0018 = 1{,}9985$. En el que segueix prenem $\alpha = 2$.

(b) $f_T(t) = \dfrac{d}{dt}(1 - e^{-2\sqrt{t}}) = \dfrac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ per a $t > 0$.

En les integrals farem el canvi $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ i utilitzarem la fórmula D.2 (pàgina 123) dels apunts.

$\overline{T} = \displaystyle\int_0^\infty t\frac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^\infty u^2 e^{-2u}du = 2\frac{2!}{2^3} = \frac{1}{2}.$

$E[T^2] = \displaystyle\int_0^\infty t^2\frac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^\infty u^4 e^{-2u}du = 2\frac{4!}{2^5} = \frac{3}{2}.$ $\sigma_T = \sqrt{\frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}11.$

(c) La transformació $g(z) = \sqrt{z}$ és bijectiva amb $\Omega_Z = [0, \infty)$ i

$$f_Z(z) = \frac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{z}}} = 2e^{-2z}.$$

Z és exponencial de paràmetre 2. El seu valor mitjà és $\overline{Z} = \dfrac{1}{2}$.

(d) Pel teorema de l'esperança

$$\overline{Z} = \int_0^1 3(1-t)\frac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 6\int_0^1 (1-u^2)e^{-2u}du = 3\left[\left(u^2 + u - \frac{1}{2}\right)e^{-2u}\right]_0^1 = \frac{3}{2}(1+3e^{-2}) = 2{,}109.$$

$F_Z(z) = 0$ per $z < 0$. En $z = 0$ hi ha un salt al valor $F_Z(0) = P(T > 1) = e^{-2}$. Per a $0 < z < 3$, $F_Z(z) = P(3(1-T) < z) = P(T > 1 - \frac{z}{3}) = e^{-2\sqrt{1-\frac{z}{3}}}$. Per a $z \geq 3$, $F_Z(z) = 1$. Es tracta d'una variable mixta (F_Z discontínua en 0 degut al tros constant per $T \geq 1$).