ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **8 de novembre de 2012**

1. Un dispositiu es construeix posant a l'atzar 4 components de tipus A i 3 components de tipus B en una fila de 7. Considerem els esdeveniments:

   C_A = "els 4 components de tipus A queden consecutius",

   C_B = "els 3 components de tipus B queden consecutius".

   (a) Calcula les probabilitats dels següents esdeveniments: C_A, C_B, $T = C_A \cap C_B$, $S_A = C_A \cap \overline{C_B}$, $S_B = \overline{C_A} \cap C_B$, $N = \overline{C_A} \cap \overline{C_B}$. Qué val $P(T) + P(S_A) + P(S_B) + P(N)$?

   (b) Calcula el valor mitjà i la desviació estàndard del nombre N_T de dispositius de tipus T en una mostra de 1000 dispositius. Hem de considerar normals els casos on $N_T = 35$ i $N_T = 62$?

   (c) Quan un dispositiu s'activa té una probabilitat de fallar que val 0,07 si és de tipus C_A i 0,05 en cas contrari. Sigui N_F el nombre de vegades que el dispositiu s'ha d'activar fins que falla. Determina el tipus de variable que és i el seu valor mitjà segons el dispositiu sigui de tipus C_A o no.

   (d) Un dispositiu s'activat 15 vegades sense fallar en cap d'elles. Quina és la probabilitat que sigui de tipus C_A? Compara amb la probabilitat a priori.

Solució:

(a) Els possibles resultats són les paraules de longitud 7 que podem formar amb 4 A's i 3 B's. N'hi ha $\binom{7}{3} = 35$ possibles (maneres de situar les 3 B's en les 7 posicions disponibles).

L'esdeveniment C_A correspòn a 4 resultats: $AAAABBB$, $BAAAABB$, $BBAAAAB$ i $BBBAAAA$. L'esdeveniment C_B correspòn a 5 resultats: $BBBAAAA$, $ABBBAAA$, $AABBBAA$, $AAABBBA$ i $AAAABBB$. L'esdeveniment $T = C_A \cap C_B$ correspòn a 2 resultats: $AAAABBB$ i $BBBAAAA$. De la unió disjunta $C_A = (C_A \cap C_B) \cup (C_A \cap \overline{C_B})$ deduïm que $C_A \cap \overline{C_B}$ correspon a $4 - 2 = 2$ casos possibles. De la unió disjunta $C_B = (C_A \cap C_B) \cup (\overline{C_A} \cap C_B)$ deduïm que $\overline{C_A} \cap C_B$ correspon a $5 - 2 = 3$ casos possibles.

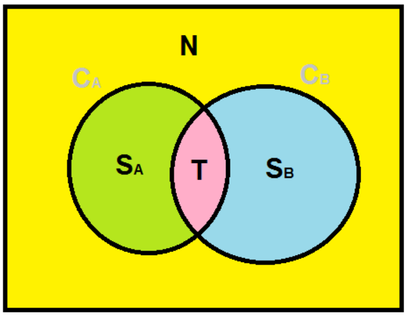
Llavors: $P(C_A) = \dfrac{4}{35}$. $P(C_B) = \dfrac{5}{35}$. $P(T) = P(C_A \cap C_B) = \dfrac{2}{35}$. $P(S_A) = P(C_A \cap C_B) = \dfrac{2}{35}$. $P(S_B) = P(C_A \cap C_B) = \dfrac{3}{35}$.

$P(N) = P(\overline{C_A} \cap \overline{C_B}) = 1 - P(C_A \cup C_B) = 1 - P(C_A) - P(C_B) + P(C_A \cap C_B) = \dfrac{28}{35}$.

$P(T) + P(S_A) + P(S_B) + P(N) = \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{3}{35} + \frac{28}{35} = 1$. Com es veu en la figura, els quatre esdeveniments constitueixen una partició de l'espai mostral.

(b)N_T és binomial amb paràmetres $n = 1000$, $p = P(T) = \frac{2}{35}$. El seu valor mitjà és $m = np = 57{,}1$ i la seva desviació $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7{,}3$. El valor 35 difereix de m en 3 desviacions, així que resulta un valor anòmal. El valor 62 difereix de m en 0,7 desviacions, així que resulta un valor normal.

(c) Per a un dispositiu donat, N_F és una variable geomètrica. Si el dispositiu és de tipus C_A el paràmetre p val 0,07 i l'esperança $1/p = 14{,}3$. Si el dispositiu no és de tipus C_A el paràmetre p val 0,05 i l'esperança $1/p = 20$.



(d) A priori $P(C_A) = \frac{4}{35} = 0{,}1142$. Si $F =$ "No falla 15 vegades":

$$P(C_A|F) = \frac{P(F|C_A)P(C_A)}{P(F|C_A)P(C_A) + P(F|\overline{C_A})P(\overline{C_A})} = \frac{(1-0,07)^{15})\frac{4}{35}}{(1-0,07)^{15})\frac{4}{35} + (1-0,05)^{15})\frac{31}{35}}$$

$$= 0{,}085.$$

La probabilitat ha disminuït ja que veiem que el dispositiu no està fallant i els de tipus C_A tenen més probabilitats de fallar.

2. Una variable aleatòria contínua X és de tipus *reciproc* en l'interval $[a,b]$ $(0 < a < b)$ si la seva densitat és $f_X(x) = \dfrac{K}{x}$, per $a < x < b$.

   (a) Calcula, en funció de a i b, el valor de la constant K, l'esperança de X, i la funció de distribució de X.

   (b) Considera X recíproca en $[1,e]$. Calcula la seva desviació estàndard i la densitat de la variable $Y = \frac{1}{X}$. Quin tipus de variable és Y?

   (c) El nivell de soroll S en un circuit és recíproc en $[1,3]$ en condicions normals i recíproc en $[1,4]$ quan està desajustat. Estudiant una mostra gran d'aquests circuits es determina que $P(S > 2) = 0{,}4$. Calcula la probabilitat que un circuit triat a l'atzar estigui desajustat.

   Sabem que un circuit té nivell de soroll inferior a 1,7. Quina és la probabilitat que estigui desajustat? Compareu amb la probabilitat a priori.

Solució:

(a) $1 = \displaystyle\int_0^a K\frac{dx}{x} = K\,[\ln x]_a^b = K\ln\frac{b}{a} \Rightarrow K = \frac{1}{\ln(b/a)}$.

$E[X] = \dfrac{1}{\ln(b/a)}\displaystyle\int_a^b x\frac{dx}{x} = \frac{b-a}{\ln(b/a)}$.

$F_X(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\ln(b/a)}\frac{dt}{t} = \frac{\ln(x/a)}{\ln(b/a)}$ per $a \le x \le b$ ($F_X(x) = 0$ per $x < a$ i $F_X(x) = 1$ per $x > b$).

(b) En aquest cas $K = \frac{1}{\ln(e)} = 1$ i $f_X(x) = \dfrac{1}{x}$ per $1 < x < e$.

$E[X] = \dfrac{e-1}{\ln(e/1)} = e - 1 = 1{,}72$. $E[X^2] = \displaystyle\int_1^e x^2 dxx = \frac{e^2-1}{2}$.

$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 = \dfrac{4e - e^2 - 3}{2}$. $\sigma = \sqrt{\dfrac{4e-e^2-3}{2}} = 0{,}49$.

La variable Y pren valors en $[e^{-1},1]$ i la seva densitat és:

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} = \frac{1}{x}\frac{1}{\frac{1}{x^2}} = x = \frac{1}{y}, \qquad e^{-1} < y < 1.$$

Així, Y és recíproca en $[e^{-1},1]$.

(c) Considerem la partició formada per $N =$ "Circuit normal" i $D =$ "Circuit desajustat". Utilitzant la funció de distribució del primer apartat:

$P(S > 2|N) = 1 - \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}369$, $P(S > 2|SD) = 1 - \frac{\ln 2}{\ln 4} = 0{,}5$.

Amb la fórmula de la probabilitat total:

$P(S > 2) = P(S > 2|N)P(N) + P(S > 2|D)P(D)$, és a dir: $0{,}4 = 0{,}369(1 - P(D)) + 0{,}5P(D)$, d'on:

$$P(D) = \frac{0{,}4 - 0{,}369}{0{,}5 - 0{,}369} = 0{,}2362.$$

$$P(D|S < 1{,}7) = \frac{P(S < 1{,}7|D)P(D)}{P(S < 1{,}7|N)P(N) + P(S < 1{,}7|D)P(D)}$$

$$= \frac{\frac{\ln 1{,}7}{\ln 4}0{,}2362}{\frac{\ln 1{,}7}{\ln 3}(1 - 0{,}2362) + \frac{\ln 1{,}7}{\ln 4}0{,}2362} = 0{,}1968.$$

La probabilitat ha disminuït ja que $S < 1{,}7$ (nivell de soroll petit) és més probable pels circuits normals.