ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **6 de novembre de 2012**

1. A un node d'una xarxa arriben paquets de dades de forma independent. La mida d'un paquet és una variable aleatòria X geomètrica de valor mitjà 25.

   (a) En 10 paquets rebuts, quants s'espera que tinguin mida més gran o igual que 40? Quina és la probabilitat que hi hagi tres o més paquets d'aquest tipus?

   (b) La probabilitat que un paquet sigui defectuós val 0,07 si $X \leq 30$ i 0,2 si $X > 30$. Quan arriba un paquet, quina és la probabilitat que sigui defectuós? Si un paquet és defectuós, quina és la probabilitat que la seva mida valgui 25? Compara amb la probabilitat a priori i comenta-ho.

   (c) Raona utilitzant l'esperança i la desviació: en un total de 1000 paquets, seria normal tenir-ne 140 defectuosos?

   (d) Un test per detectar si un paquet és defectuós té probabilitat ϵ de fallar (sobre paquets defectuosos i sobre paquets no defectuosos). Quin és el màxim valor que pot tenir ϵ si la probabilitat que un paquet que passa el test com a no defectuós sigui realment defectuós no ha de ser superior a 0,01?

   Solució:

   (a) El paràmetre p de la variable geomètrica X s'obté de $E[X] = \frac{1}{p}$. Així, $p = \frac{1}{25}$. La funció de distribució de X és $F_X(n) = 1 - q^n$ on $q = 1 - p = \frac{24}{25}$.

   En nombre N de paquets amb mida igual o superior a 40 és una variable binomial amb paràmetres $n = 10$ i $p_1 = P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) = 1 - F_X(39) = (\frac{24}{25})^{39} = 0{,}2035$.

   Llavors, $E[N] = np_1 = 2$ i $P(N \geq 3) = 1 - P(N \leq 2) = 1 - q_1^{10} - 10p_1q_1^9 - \binom{10}{2}p_1^2q_1^8 = 0{,}3328$.

   (b) $D =$ "Paquet defectuós".

   $P(D) = P(D|X \leq 30)P(X \leq 30) + P(D|X > 30)P(X > 30) = 0{,}07(1 - (\frac{24}{25})^{30}) + 0{,}2(\frac{24}{25})^{30} = 0{,}1082$.

   $P(X=25) = q^{24}p = (\frac{24}{25})^{24}\frac{1}{25} = 0{,}015$ (probabilitat a priori).

   $P(X=25|D) = \frac{P(D|X=25)P(X=25)}{P(D)} = \frac{0{,}07 \cdot 0{,}015}{0{,}1082} = 0{,}0097$.

   La probabilitat ha disminuït ja que $X = 25 \leq 30$ es troba en la situació on és menys probable ser defectuós.

   (c) El nombre de paquets defectuosos N és una variable binomial amb paràmetres $n = 1000$ i $p = P(D) = 0{,}1082$. La seva esperança val $m = np = 108{,}2$ i la seva desviació $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 9{,}8$. El valor 140 difereix de m en 3,2 desviacions, així que resulta un valor anòmal.

   (d)$D =$ "Paquet defectuós", $T_D =$ "Resultat del test: defectuós". Així, $P(T_D|\overline{D}) = P(T_{\overline{D}}|D) = \epsilon$.

   Volem

   $$0{,}01 \geq P(D|T_{\overline{D}}) = \frac{P(T_{\overline{D}}|D)P(D)}{P(T_{\overline{D}}|D)P(D) + P(T_{\overline{D}}|\overline{D})P(\overline{D})} = \frac{\epsilon P(D)}{\epsilon P(D) + (1-\epsilon)P(\overline{D})}.$$

   Resolent la inequació:

   $$\epsilon \leq \frac{P(\overline{D})}{99P(D) + P(\overline{D})} = 0{,}0768.$$

2. Un tipus de variable aleatòria contínua X pren valors en $[0, a]$ amb funció de densitat $f_X(x) = K \sin \dfrac{\pi x}{a}$, per $0 < x < a$, on a i K són constants.

   (a) Calcula, en funció de a, el valor de la constant K, l'esperança i la desviació estàndard de X, i la funció de distribució de X.

   (b) Troba les funcions de densitat de les variables $U = \sin \dfrac{\pi X}{a}$ i $V = \cos \dfrac{\pi X}{a}$. Alguna d'elles és de tipus conegut?

   (c) Per $a = \pi$, considera la variable:

$$W = \begin{cases} X & \text{si } X < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } X > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   Explica, sense càlculs, si es tracta d'una variable discreta, contínua o mixta. Troba'n l'esperança.

Solució:

(a) $1 = \displaystyle\int_0^a K \sin \frac{\pi x}{a} dx = K \left[-\frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \right]_0^a = K \frac{2a}{\pi} \Rightarrow K = \frac{\pi}{2a}.$

$E[X] = \dfrac{\pi}{2a} \displaystyle\int_0^2 x \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{\pi}{2a} \left[-\frac{ax}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{a^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a} \right]_0^a = \frac{a}{2}.$

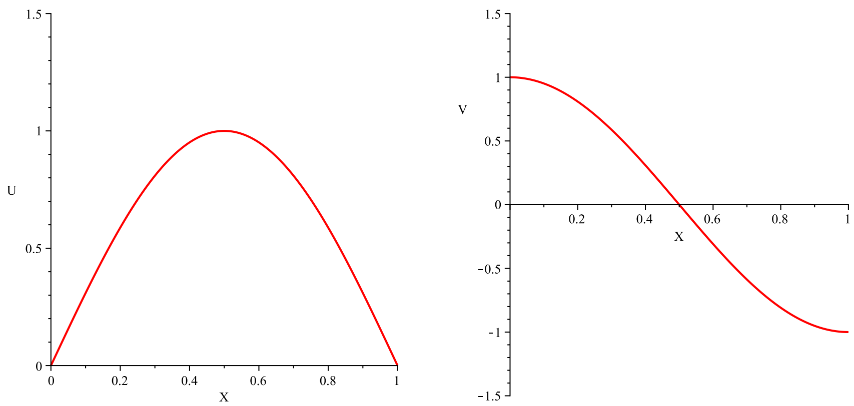
$E[X^2] = \dfrac{\pi}{2a} \displaystyle\int_0^2 x^2 \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{\pi}{2a} \left[-\frac{a}{\pi} x^2 \cos \frac{\pi x}{a} + 2\frac{a^2}{\pi^2} x \sin \frac{\pi x}{a} + 2\frac{a^3}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{a} \right]_0^a = a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right).$

$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = a^2 \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi^2} \right) - \left(\dfrac{a}{2} \right)^2 = a^2 \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2} \right).$

$\sigma = a\sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{\pi^2}} = 0{,}217a.$

$F_X(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi t}{a} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right)$ per $0 \leq x \leq a$ ($F_X(x) = 0$ per $x < 0$ i $F_X(x) = 1$ per $x > a$).

(b) Com es veu en les gràfiques de les transformacions (cas $a = 1$), $\Omega_U = [0, 1]$, $\Omega_V = [-1, 1]$



Per la variable U, hi ha dos valors de X, x_1 i x_2 tals que $\sin \frac{\pi x_i}{a} = u$. Per tant, $f_X(x_1) = f_X(x_2) = \frac{\pi}{2a} u$. També és $|u'(x_i)| = \frac{\pi}{a} |\cos \frac{\pi x_i}{a}| = \frac{\pi}{a}\sqrt{1 - u^2}$.

$$f_U(u) = f_X(x_1) \frac{1}{|u'(x_1)|} + f_X(x_2) \frac{1}{|u'(x_2)|} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}, \qquad 0 < u < 1.$$

Per la variable V, hi ha un valor de X, tal que $\cos\frac{\pi x}{a} = v$. $|\frac{dv}{dx}| = \frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}$.

$$f_V(v) = f_X(x)\frac{1}{|\frac{dv}{dx}|} = \frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi x}{a}\frac{1}{\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}} = \frac{1}{2}, \qquad -1 < v < 1.$$

La variable V és uniforme en l'interval $[-1, 1]$.

(c) La transformació W té un tros constant ($\frac{\pi}{2} < X < \pi$) que fa que el punt $W = \frac{\pi}{2}$ tingui probabilitat no nul·la. Així, es tracta d'una variable mixta. Utilitzant el teorema de l'esperança:

$$E[W] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}\left[-x\cos x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4}\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 1{,}28.$$