ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **19 d'abril de 2012**

1. Disposem de dos canals de comunicació paral·lels, independents, dedicats a transmetre seqüències de bits. Quan es transmet un bit la probabilitat que surti canviat val 0,05 en el canal A i 0,1 en el canal B.

   (a) Enviem una paraula de dos bits. Calcula la probabilitat que la sortida dels dos canals sigui la mateixa. Calcula la probabilitat que la paraula de sortida sigui correcta si la sortida dels dos canals coincideix. És un bon criteri de correcció acceptar les paraules quan la sortida dels canals coincideix?

   (b) Sigui N el nombre de vegades que s'ha d'enviar una paraula de 32 bits pel canal A fins que aquesta arriba correctament. Digues el tipus de variable que és i el valor de la seva esperança. Compara amb el canal B.

   (c) Enviem paraules de 4 bits. La paraula s'intenta enviar pel canal A però hi ha una probabilitat $\frac{1}{3}$ que s'hagi d'enviar pel canal B. Calcula la probabilitat que una paraula arribi amb exactament un bit canviat. Si una paraula arriba amb un bit canviat, calcula la probabilitat que s'hagi transmès pel canal A.

   (d) Una paraula de 4 bits s'envia pel canal A i la sortida s'envia pel canal B (canals en sèrie). Calcula la probabilitat que la sortida final tingui exactament dos bits canviats (negligeix els termes amb més de dos canvis).

   (e) Una seqüencia de 800 bits surt del canal A amb 62 bits canviats. Calcula el valor mitjà i la desviació típica de la variable que dóna el nombre de bits canviats i digues si el valor observat indica que no hi ha cap anomalia en el canal. Conclouríem el mateix si a l'enviar 80 bits n'arribessin 6 canviats?

Solució:

(a) Denotem $\epsilon_A = 0{,}05$, $\overline{\epsilon}_A = 0{,}95$, $\epsilon_B = 0{,}1$, $\overline{\epsilon}_B = 0{,}9$. Si s'envien dos bits b_1b_2 i anomenem S_A, S_B a les sortides de cada canal:

$P(S_A = S_B) = P(S_A = b_1b_2)P(S_B = b_1b_2) + P(S_A = \overline{b}_1b_2)P(S_B = \overline{b}_1b_2) + P(S_A = b_1\overline{b}_2)P(S_B = b_1\overline{b}_2) + P(S_A = \overline{b}_1\overline{b}_2)P(S_B = \overline{b}_1\overline{b}_2) = \overline{\epsilon}_A^2\overline{\epsilon}_B^2 + 2\overline{\epsilon}_A\epsilon_A\overline{\epsilon}_B\epsilon_B + \epsilon_A^2\epsilon_B^2 = 0{,}731025 + 0{,}00855 + 0{,}000025 = 0{,}7396$.

$$P(\text{correcta}|S_A = S_B) = \frac{P(S_A = S_B = b_1b_2)}{P(S_A = S_B)} = \frac{0{,}731025}{0{,}7396} = 0{,}9884.$$

És un bon criteri ja que $P(S_A = b_1b_2) = \overline{\epsilon}_A^2 = 0{,}9025$.

(b) N és una variable geomètrica de paràmetre $p = \overline{\epsilon}_A^{32} = 0{,}1937$. $\overline{N} = \frac{1}{p} = 5{,}2$.

Pel canal B, $p = \overline{\epsilon}_B^{32} = 0{,}03433$. $\overline{N} = \frac{1}{p} = 29{,}1$.

Lògicament, al tenir el canal B més probabilitat d'error, calen més transmissions.

(c) $P(1 \text{ bit canviat}) = P(1 \text{ bit canviat}|A)P(A) + P(1 \text{ bit canviat}|B)P(B) = \binom{4}{1}\epsilon_A\overline{\epsilon}_A^3\frac{2}{3} + \binom{4}{1}\epsilon_B\overline{\epsilon}_B^3\frac{1}{3} = 0{,}1143 + 0{,}0972 = 0{,}2115$.

$$P(A|1 \text{ bit canviat}) = \frac{P(1 \text{ bit canviat}|A)P(A)}{P(1 \text{ bit canviat})} = \frac{0{,}1143}{0{,}21153} = 0{,}5404.$$

(d) $P(2 \text{ canvis}) = P(2 \text{ canvis en } A)P(0 \text{ canvis en } B) + P(0 \text{ canvis en } A)P(2 \text{ canvis en } B) + P(1 \text{ canvi en } A)P(1 \text{ canvi diferent en } B) = \binom{4}{2}\epsilon_A^2\overline{\epsilon}_A^2\overline{\epsilon}_B^4 + \overline{\epsilon}_A^4\binom{4}{2}\epsilon_B^2\overline{\epsilon}_B^2 + \binom{4}{1}\epsilon_A\overline{\epsilon}_A^3\binom{3}{1}\epsilon_B\overline{\epsilon}_B^3 = 0{,}008882 + 0{,}03958 + 0{,}0375 = 0{,}08597$.

(e) Es tracta d'una variable binomial. Pel primer cas, $n = 800$ i $p = 0,05$, el valor mitjà és $np = 40$ i $\sigma = \sqrt{npq} = 6{,}16$. Com 62 difereix de 40 en 3,5 desviacions, s'ha de considerar un valor anòmal. Pel segon cas, $n = 80$ i $p = 0,05$, el valor mitjà és $np = 4$ i $\sigma = \sqrt{npq} = 1{,}95$. Com 6 difereix de 4 en una desviació, s'ha de considerar un valor normal.

Encara que en els dos casos la proporció observada és la mateixa $\frac{62}{800} \approx \frac{6}{80} = 0{,}075$ la llei dels grans nombres fa que per valors grans de n les fluctuacions es redueixin i les freqüències observades corresponguin més a la probabilitat 0,05.

Nota: Els apartats (a) i (d) es poden fer considerant l'efectes dels dos canals sobre cada bit i variables binomials pel nombre final de canvis. En l'apartat (a) la probabilitat que un bit coincideixi és $\bar{\epsilon}_A\bar{\epsilon}_B + \epsilon_A\epsilon_B = 0{,}86$ *de manera que* $P(S_A = S_B) = 0{,}86^2 = 0{,}7396$*. En l'apartat (d) la probabilitat que un bit canviï val* $\epsilon_A\bar{\epsilon}_B + \bar{\epsilon}_A\epsilon_B = 0{,}14$ *de manera que* $P(\textit{2 canvis}) = \binom{4}{2}0{,}14^2(1-0{,}14)^2 = 0{,}08698$*, resultat que ja no implica cap aproximació.*

2. La variació en el voltatge que proporciona una font d'alimentació quan aquesta es desajusta ve donada per una variable aleatòria X amb funció de densitat $f_X(x) = Kx^3(4-x^2)$, per $0 < x < 2$.

   (a) Calcula, el valor de la constant K, l'esperança i la desviació estàndard de X, i la funció de distribució de X.

   (b) La probabilitat que una font d'alimentació estigui desajustada val 0,1. Només podem detectar que una font està desajustada si $X > 1$. Calcula la probabilitat que una font aparentment correcta estigui desajustada.

   (c) L'energia associada a aquesta variació de voltatge és la variable $Y = X^2$. Un factor de cost associat a X és la variable:

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } X < 1, \\ X & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

   Si alguna d'aquestes variables és contínua, raona-ho i troba'n la densitat. Si alguna no és contínua, raona-ho i troba'n l'esperança.

Solució:

(a) $1 = \int_0^2 Kx^3(4-x^2)dx = K\int_0^2 (4x^3 - x^5)dx = K\left[x^4 - \frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}K \Rightarrow K = \frac{3}{16}.$

$E[X] = \frac{3}{16}\int_0^2 x \cdot x^3(4-x^2)dx = \frac{48}{35} = 1{,}3714.$

$E[X^2] = \frac{3}{16}\int_0^2 x^2 \cdot x^3(4-x^2)dx = 2.$ $\sigma_X = \sqrt{2 - \left(\frac{48}{35}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{35} = 0{,}3452.$

$F_X(x) = \int_0^x \frac{3}{16}t^3(4-t^2)dt = \frac{6x^4 - x^6}{32}$ per $0 \le x \le 2$ ($F_X(x) = 0$ per $x < 0$ i $F_X(x) = 1$ per $x > 2$).

(b) Hi ha dos tipus de fonts: desajustades (D, amb la variable X de l'enunciat) i correctes (C, amb $X = 0$). Una font és aparentment correcta si $X < 1$.

$$P(D|X<1) = \frac{P(X<1|D)P(D)}{P(X<1|D)P(D) + P(X<1|C)P(C)} = \frac{F_X(x) \cdot 0{,}1}{F_X(x)\cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}9} = \frac{5}{293} = 0{,}017$$

(c) La variable Y és contínua al ser una transformació derivable sense intervals constants. La variable Z és mixta al tenir una part constant ($Z = 1$ per $0 < X < 1$ i una part variable, per $1 < X < 2$). Per $0 < x < 2$, y varia entre 0 i 4 i l'equació $y = x^2$ té una única solució $x = \sqrt{y}$:

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} = \frac{3}{16}x^3(4-x^2)\frac{1}{2x} = \frac{3}{32}x^2(4-x^2) = \frac{3}{32}y(4-y), \qquad 0 < y < 4.$$

Pel teorema de l'esperança:

$$E[Z] = \int_0^1 1 \cdot \frac{3}{16}x^3(4-x^2)dx + \int_1^2 x \cdot \frac{3}{16}x^3(4-x^2)dx$$

$$= F_X(1) + \int_1^2 x \cdot \frac{3}{16}(4x^4 - x^6)dx = \frac{5}{32} + \frac{699}{560} = 1{,}4044.$$