

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial

7 de novembre de 2011

1. Un centre de càlcul ofereix ordinadors als quals els usuaris s'hi poden connectar remotament.

En la zona 1 tenim 5 ordinadors als quals es connecten 3 usuaris. A cada usuari se li assigna a l'atzar un ordinador. En la modalitat *A* l'assignació es fa de forma independent, de manera que un ordinador pot quedar amb més d'un usuari. En la modalitat *B* l'assignació es fa de manera que als usuaris els corresponen ordinadors diferents.

En la zona 2 tenim 30 ordinadors independents. En cadascun el nombre d'usuaris connectats és una variable de Poisson que en condicions normals té paràmetre $\alpha = 3$.

- Calcula la probabilitat que dos ordinadors fixats quedin sense usuaris en cadascuna de les dues situacions: zona 1 mode A, zona 1 mode B. Calcula la probabilitat que en la zona 2 hi hagi com a mínim dos ordinadors no ocupats.
- Considera la variable que dóna el nombre d'ordinadors desocupats en la zona 2. Troba la seva esperança i la seva desviació. Si s'observa que hi ha 5 ordinadors desocupats, podem sospitar que no ens trobem en condicions normals?
- En cada ordinador de la zona 2 s'encén un indicador quan el seu nombre d'usuaris és igual o superior a 4. Calcula la probabilitat que un ordinador amb l'indicador encès tingui 5 usuaris.
- Anem inspeccionant ordinadors de la zona 2 fins que en trobem un amb 5 usuaris connectats. Sigui N el nombre d'ordinadors inspeccionats. Troba el seu valor mitjà i la seva desviació. (Fes-ho com si hi hagués un nombre indefinit d'ordinadors.)

Solució:

(a) Zona 1, modalitat *A*. Per a que els dos primers ordinadors quedin desocupats, als tres usuaris s'han d'assignar algun dels altres tres ordinadors:

$$P = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0,216.$$

Zona 1, modalitat *B*. Ens fixem en quins tres dels cinc ordinadors han estat triats. La tria es pot fer de $\binom{5}{3}$ maneres. Només en una d'elles queden els dos primers ordinadors lliures:

$$P = \frac{1}{\binom{5}{3}} = 0,1.$$

En la zona 2, el nombre d'ordinadors desocupats és una variable D , binomial amb $n = 30$ i $p = P(0 \text{ usuaris}) = e^{-3}$.

$$\begin{aligned} P(N \geq 2) &= 1 - P(N=0) - P(N=1) \\ &= 1 - (1 - e^{-3})^{30} - 30(1 - e^{-3})^{29}e^{-3} = 0,4442. \end{aligned}$$

(b) $\bar{D} = np = 30e^{-3} = 1,5$. $\sigma_D = \sqrt{npq} = \sqrt{30e^{-3}(1 - e^{-3})} = 1,2$.

5 difereix de 1,5 en 3 desviacions així que podem sospitar que no ens trobem en condicions normals.

(c) Si U és el nombre d'usuaris en l'ordinador, ens demanen

$$\begin{aligned} P(U = 5 | U \geq 4) &= \frac{P(U = 5)}{P(U \geq 4)} = \frac{e^{-3} \frac{3^5}{5!}}{1 - e^{-3} (1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!})} \\ &= \frac{81}{40(e^3 - 13)} = 0,2858. \end{aligned}$$

(d) N és geomètrica amb $p = e^{-3} \frac{3^5}{5!} = 0,1008$. $\bar{N} = \frac{1}{p} = 10$. $\sigma_N = \frac{\sqrt{q}}{p} = 9,4$.

2. El temps en segons que tarda una línia de comunicació en transmetre un paquet de dades és una variable aleatòria X amb funció de densitat $f_X(x) = Kxe^{-\alpha x}$, per $0 < x < \infty$ (α i K són constants).

- Calcula, en funció de α , el valor de K , l'esperança i la desviació estàndard de X , i la funció de distribució de X .
- 5 línies amb $\alpha = 1$ transmeten un paquet de manera independent. Calcula la probabilitat que en alguna el temps de transmissió sigui més gran que 4.
- El factor de velocitat d'una transmissió és la variable Y definida:

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X < 1, \\ \frac{1}{X} & \text{si } X > 1 \end{cases}$$

Raona si es tracta d'una variable discreta, contínua o mixta. Calcula el seu valor mitjà en funció de α . Discuteix a partir d'aquest resultat si és cert que com més ràpida és la línia, més gran és el factor de velocitat.

- Un sistema té tres línies: L_1 amb $\alpha = 1$, L_2 amb $\alpha = 2$, i L_3 amb $\alpha = 3$. Per transmetre un paquet es tria una línia a l'atzar i resulta que passat 1 segon encara no ha arribat. Quina és la probabilitat que s'estigui transmetent per L_3 ? Compara amb la probabilitat a priori.

Solució:

(a) Calculem els moments:

$$m_n = E[X^n] = \int_0^\infty x^n \cdot f_X(x) dx = K \int_0^\infty x^{n+1} e^{-\alpha x} dx = K \frac{(n+1)!}{\alpha^{n+2}}.$$

Imposem $m_0 = 1$, d'on $K = \alpha^2$.

$$E[X] = m_1 = \frac{2}{\alpha}. \quad \sigma_X = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{\frac{6}{\alpha^2} - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}.$$

Per $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_0^x \alpha^2 x' e^{-\alpha x'} dx' = \alpha^2 \left[-\left(\frac{x'}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha x'} \right]_0^x = 1 - (\alpha x + 1)e^{-\alpha x}.$$

(b) $P(\text{alguna } X > 4) = 1 - P(\text{totes les } X < 4) = 1 - P(X < 4)^5 = 1 - F_X(4)^5 = 1 - (1 - 5e^{-4})^5 = 0,3813$.

(c) Y és una variable mixta ja que pot prendre qualsevol valor en $(0, 1]$ i $P(Y = 1) = P(X < 1) \neq 0$.

Pel teorema de l'esperança:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \int_0^1 1 \cdot \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx \\ &= F_X(1) + \alpha^2 \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_1^\infty = 1 - (\alpha + 1)e^{-\alpha} + \alpha e^{-\alpha} = 1 - e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

El factor de velocitat creix amb α . També podem mesurar la velocitat amb l'invers del temps mitjà: $\frac{\alpha}{2}$, així que el comportament és consistent.

(d) $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = (\alpha + 1)e^{-\alpha}$. Per Bayes:

$$\begin{aligned} P(L_3|X > 1) &= \frac{P(X > 1|L_3)\frac{1}{3}}{P(X > 1|L_1)\frac{1}{3} + P(X > 1|L_2)\frac{1}{3} + P(X > 1|L_3)\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4e^{-3}}{2e^{-1} + 3e^{-2} + 4e^{-3}} = 0,148. \end{aligned}$$

La probabilitat a priori és $P(L_3) = \frac{1}{3} = 0,333$. La probabilitat ha disminuït ja que L_3 és la línia més ràpida i veiem que el paquet està tardant en arribar.