

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial

15 d'abril de 2011

1. Tenim n ordinadors dels quals dos són defectuosos. Es disposen tots en una xarxa lineal oberta, triant-los a l'atzar. Diem que dos ordinadors han quedat separats si a la xarxa hi ha algun altre ordinador entre ells. El temps T que triga aquesta xarxa en realitzar un càlcul és una variable uniforme en $[1, 4]$ si els ordinadors defectuosos queden separats, i en $[2, 5]$ si queden contigus.
- (a) Calcula, en funció de n , les probabilitats dels següents esdeveniments:
 S = “els ordinadors defectuosos queden separats”,
 E = “els ordinadors defectuosos queden en els extrems”,
 A = “hi ha algun ordinador defectuós als extrems”.
- (b) Calcula, en funció de n , la probabilitat que els ordinadors defectuosos siguin contigus, sabent que $T > 3$.
- (c) El montatge d'aquesta xarxa, per $n = 10$ es repeteix cada dia de manera independent. En un any, quin és el nombre mitjà de dies en que $T > 3$? Podem sospitar que passa quelcom anormal si resulta $T > 3$ en 175 dies?
- (d) Amb el procediment de l'apartat anterior, sigui N el nombre de dies que passen fins que els ordinadors defectuosos queden als extrems. Troba el valor mitjà de N i la probabilitat que $N \leq 10$.

Solució:

(a) El resultat de l'experiment es redueix a dir quin parell de les n posicions de la xarxa ocupen els dos ordinadors defectuosos. El nombre de casos possibles és $\binom{n}{2}$. El nombre de casos en que queden contigus és $n - 1$ (possibles posicions del primer element). El nombre de casos en que queden als extrems és 1. El nombre de casos en que ningun queda als extrems és $\binom{n-2}{2}$ (possibles parelles eliminant les dues posicions dels extrems).

$$P(S) = 1 - P(\text{"ordinadors defectuosos contigus"}) = 1 - \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-2}{n}.$$

$$P(E) = \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

$$P(A) = 1 - P(\text{"cap ordinador defectuós als extrems"}) = 1 - \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{2}} = 2 \frac{2n-3}{n(n-1)}.$$

(b) Com hem vist, $P(\text{"separats"}) = P(S) = \frac{n-2}{n}$, $P(\text{"contigus"}) = P(\bar{S}) = \frac{2}{n}$. Segons els intervals de l'enunciat, $P(T > 3|S) = \frac{4-3}{4-1} = \frac{1}{3}$, $P(T > 3|\bar{S}) = \frac{5-3}{5-2} = \frac{2}{3}$. Per Bayes:

$$P(\bar{S}|T > 3) = \frac{P(T > 3|\bar{S})P(\bar{S})}{P(T > 3|S)P(S) + P(T > 3|\bar{S})P(\bar{S})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{n-2}{n} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{n}} = \frac{4}{n+2}.$$

$$(c) P(T > 3) = P(T > 3|S)P(S) + P(T > 3|\bar{S})P(\bar{S}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{10-2}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{5}.$$

El nombre de dies a l'any en que $T > 3$ és una variable binomial d'esperança $365 \cdot \frac{2}{5} = 146$ i desviació $\sqrt{365 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}} = 9,36$. 175 difereix de 146 es més de tres desviacions, així que el resultat és anormal.

(d) Es tracta d'una variable geomètrica amb $p = P(E) = \frac{2}{10(10-1)} = \frac{1}{45}$. El seu valor mitjà és $\frac{1}{p} = 45$. $P(N \leq 10) = F_N(10) = 1 - q^{10} = 1 - \left(\frac{44}{45}\right)^{10} = 0,2012$.

2. A una paret aïllant arriben partícules amb energia X distribuïda segons una variable exponencial de paràmetre $\lambda = 2$. La distància que arriba a penetrar en la paret una partícula d'energia X és $Z = a(1 - e^{-X})$ on $a > 1$ és una constant dependent del material de la paret.

- Si arriben 5 partícules, quina és la probabilitat que exactament dues tinguin energia superior a 2.
- Trobeu la funció de densitat i la funció de distribució de Z .
- Quin és el valor de a que fa que l'esperança de Z sigui 1?
- Quin és el valor de a que fa que la probabilitat que la partícula traspassi una paret d'espessor 1 valgui 0,05?

Solució:

(a) $P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 2}) = e^{-4}$. De les 5 partícules, el nombre N de les tenen $X > 2$ és binomial:

$$P(N=2) = \binom{5}{2} (e^{-4})^2 (1 - e^{-4})^3 = 0,0032.$$

(b) Com X va de 0 a infinit, $\Omega_Z = (0, a)$.

$$f_Z(z) = f_X(x) \frac{1}{|dz/dx|} = 2e^{-2x} \frac{1}{ae^{-x}} = \frac{2}{a} e^{-x} = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{z}{a}\right), \quad 0 < z < a.$$

$F_Z(z) = 0$ per $z < 0$, $F_Z(z) = 1$ per $z > a$. Per $0 \leq z \leq a$:

$$F_Z(z) = \int_0^z \frac{2}{a} \left(1 - \frac{z'}{a}\right) dz' = \frac{2}{a} \left(z - \frac{z^2}{2a}\right).$$

(c)

$$\bar{Z} = \int_0^a z \cdot \frac{2}{a} \left(1 - \frac{z}{a}\right) dz = \left[\frac{2}{a} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3a}\right) \right]_0^a = \frac{a}{3}.$$

$\bar{Z} = 1$ per $a = 3$.

(d) Per traspasar la paret ha de ser $Z > 1$. Tenim $0,05 = P(Z > 1) = 1 - F_Z(1) = 1 - \frac{2}{a} \left(1 - \frac{1}{2a}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2$. Hi ha dues solucions:

$$1 - \frac{1}{a} = \pm \sqrt{0,05} \Rightarrow a = 0,817, a = 1,288.$$

La solució vàlida és $a = 1,288$.