ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen Parcial **11 de novembre de 2010**

1. Un dispositiu consta de quatre processadors. Cada processador, amb independència dels altres, pot fallar amb probabilitat 0,1. El dispositiu funciona si com a màxim fallen dos processadors.

   (a) En una xarxa estem utilitzant 300 d'aquests dispositius. Quina és la probabilitat que algun no funcioni?

   (b) Si un dispositiu no funciona, quina és la probabilitat que li fallin els quatre processadors? Compareu-la amb la probabilitat a priori i digueu si la variació és raonable.

   (c) En la xarxa del primer apartat, quin és el nombre mitjà de dispositius en que no ha fallat cap processador?

   (d) Un sistema de verificació va recorrent els dispositius d'una xarxa fins que en troba un que no funciona. Quants n'examina, en valor mitjà? Utilitzeu la desviació típica per decidir si el cas en que només n'examina 27 s'ha de considerar una situació anòmala.

Solució:

(a) En un dispositiu, el nombre N de processadors que fallen és una variable binomial amb $n=4$, $p=0{,}1$. L'esdeveniment F = "el dispositiu funciona" equival a $N \in \{0,1,2\}$. Així

$$P(F) = 0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 + \binom{4}{2} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}9963$$

Per tant, la probabilitat que no funcioni val $P(\overline{F}) = 0{,}0037$. Ara, amb 300 dispositius,

$$P(\text{“algun no funciona”}) = 1 - P(\text{“tots funcionen”}) = 1 - 0{,}9963^{300} = 0{,}6711.$$

(b)

$$P(N=4 \mid \overline{F}) = \frac{P(N=4 \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(N=4)}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}1^4}{0{,}0037} = 0{,}027.$$

La probabilitat a priori és $P(N=4) = 0{,}0001$. La probabilitat ha augmentat ja que el fet de no funcionar indica que hi ha processadors que fallen i això dóna més pes al cas $N = 4$.

(c) El nombre de dispositius en que no ha fallat cap processador és una variable binomial amb $n = 300$ i $p = P(N=0) = 0{,}9^4 = 0{,}6561$. El seu valor mitjà val $np = 197$.

(d) El nombre de dispositius que s'examinen és una variable geomètrica amb paràmetre $p = P(\overline{F}) = 0{,}0037$. El seu valor mitjà val $\dfrac{1}{p} = 270$. La seva desviació és $\dfrac{\sqrt{q}}{p} = 270$. Tenim una dispersió molt gran i els valors dins l'interval 270 ± 270, com és el cas de 27, no es poden considerar anòmals.

2. Considereu un tipus de variable aleatòria T amb densitat:

$$f_T(t) = K(L-t), \qquad 0 \le t \le L,$$

on K és una constant i L és un paràmetre. El temps que triga en arribar el senyal d'un satèl·lit és una variable del tipus anterior amb $L = 3$ en condicions atmosfèriques normals i $L = 5$ si hi ha perturbacions atmosfèriques.

(a) Calculeu el valor de K, així com l'esperança i la variància de la variable T, en funció de L.

(b) Les perturbacions atmosfèriques es produeixen aleatòriament, un de cada 10 dies. Quina es la probabilitat que hi hagin perturbacions si en $t = 2$ encara no ha arribat el senyal del satèl·lit?

(c) Estem en condicions atmosfèriques normals. El temps que requereix processar el senyal del satèl·lit és $V = e^T$. Calculeu la densitat i els moments de la variable V. Quin és el seu valor mitjà?

Solució:

(a) $1 = \displaystyle\int_0^L K(L-t)dt = K\left[Lt - \frac{t^2}{2}\right]_0^L = K\frac{L^2}{2}$, d'on $K = \dfrac{2}{L^2}$.

$$E[T] = \int_0^L t\frac{2}{L^2}(L-t)dt = \frac{L}{3}.$$

$$E[T^2] = \int_0^L t^2\frac{2}{L^2}(L-t)dt = \frac{L^2}{6}.$$

$$V[T] = E[T^2] - E[T]^2 = \frac{L^2}{6} - \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{L^2}{18}.$$

(b) L'esdeveniment A = "hi ha perturbacions atmosfèriques" té probabilitat 0,1. Per Bayes:

$$P(A \mid T > 2) = \frac{P(T > 2 \mid A)P(A)}{P(T > 2 \mid A)P(A) + P(T > 2 \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5^2}\int_2^5 (5-t)dt \cdot 0{,}1}{\frac{2}{5^2}\int_2^5 (5-t)dt \cdot 0{,}1 + \frac{2}{3^2}\int_2^3 (3-t)dt \cdot 0{,}9} = \frac{\frac{9}{25}\cdot 0{,}1}{\frac{9}{25}\cdot 0{,}1 + \frac{1}{9}\cdot 0{,}9} = \frac{9}{34} = 0{,}2647.$$

(c) $f_T(t) = \frac{2}{9}(3-t)$, $0 \le t \le 3$. V pren valors en l'interval $[1, e^3]$ amb densitat

$$f_V(v) = f_T(t)\frac{1}{|dv/dt|} = \frac{2}{9}(3-t)\frac{1}{e^t} = \frac{2}{9v}(3 - \ln v), \qquad 1 \le v \le e^3.$$

Els moments de V valen

$$E[V^n] = E[e^{nT}] = \frac{2}{9}\int_0^3 e^{nt}(3-t)dt = \frac{2}{9}\left[(3-t)\frac{e^{nt}}{n} + \frac{e^{nt}}{n^2}\right]_0^3 = \frac{2(e^{3n} - 1 - 3n)}{9n^2}.$$

Fent $n = 1$, tenim el valor mitjà: $E[V] = \frac{2e^3 - 8}{9} = 3{,}57$.