ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final **8 de juny de 2015**
Notes provisionals: 22/6, visualització exàmens corregits: 23/6, al·legacions: 25/6, notes definitives: 26/6. **Temps: 3h**

---

1. Del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ s'escullen succesivament i de forma aleatòria un total de k nombres distints, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Es demana:

(a) Probabilitat que almenys un del nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sigui parell (distingiu els casos n parell i n senar).

(b) Si $n = 6$ i $k = 2$, funció de probabilitat de la variable aleatòria $X = x_1 + x_2$. Dibuixeu la seva gràfica. Calculeu la seva esperança, i la seva variància.

(c) Probabilitat que el segon nombre escollit sigui més gran que el primer, és a dir, $\mathrm{P}(x_2 > x_1)$. Discutiu el resultat. Com a generalització del cas anterior, calculeu $\mathrm{P}(x_1 < x_2 < \cdots < x_k)$. Discutiu el cas $k = n$.

2. Les variables aleatòries X i Y donen, respectivament, els instants d'arribada del primer i segon paquets de dades a un punt d'una xarxa. La seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4e^{-2y}, & 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

(a) Calculeu les funcions de densitat marginals de X i Y. Quin és el temps mitjà que transcorre entre el primer i el segon paquets?

(b) Calculeu el coeficient de correlació ρ entre X i Y. Què podem dir de la independència de X i Y a partir d'aquest valor?

(c) Es defineixen les noves variables aleatòries $U = X$, $V = \dfrac{Y}{X}$. Calculeu la densitat conjunta de (U, V) indicant la seva regió de validesa. Calculeu la densitat marginal de V i utilitzeu-la per calcular la probabilitat que $Y > 2X$ i estudiar el comportament de $E\left[\dfrac{Y}{X}\right]$.

Indicació: $\displaystyle\int_0^\infty z^n e^{-az} dz = \frac{n!}{a^{n+1}}, \qquad (a > 0).$

3. Donades les variables aleatòries Φ i X, uniformes en $(0, \pi/4)$ i $(-1, 1)$ respectivament, i independents, es defineixen per a $t > 0$ els processos estocàstics:

$$Y(t) = t \cdot \operatorname{tg} \Phi \qquad \text{i} \qquad Z(t) = (t - X) \operatorname{tg} \Phi.$$

Es demana:

(a) Les funcions de distribució i de densitat de primer ordre del procés $Y(t)$, i la seva funció valor mitjà $m_Y(t)$.

(b) La funció valor mitjà $m_Z(t)$ i d'autocorrelació $R_Z(t_1, t_2)$.

(c) La millor estimació lineal homogènia de $Z(t_1)$ donat $Z(t_2)$.

Indicació: $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 u \, du = \operatorname{tg} u - u.$