ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'Examen final **8 de juny de 2015**

---

1. Del conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ s'escullen succesivament i de forma aleatòria un total de k nombres distints, $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Es demana:

(a) Probabilitat que almenys un del nombres $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sigui parell (distingiu els casos n parell i n senar).

(b) Si $n = 6$ i $k = 2$, funció de probabilitat de la variable aleatòria $X = x_1 + x_2$. Dibuixeu la seva gràfica. Calculeu la seva esperança, i la seva variància.

(c) Probabilitat que el segon nombre escollit sigui més gran que el primer, és a dir, $\mathrm{P}(x_2 > x_1)$. Discutiu el resultat. Com a generalització del cas anterior, calculeu $\mathrm{P}(x_1 < x_2 < \cdots < x_k)$. Discutiu el cas $k = n$.

Solució:

(a) $\mathrm{P}(\text{almenys un } x_i \text{ parell}) = 1 - \mathrm{P}(\text{tots els } x_i \text{ senars}) = 1 - \binom{n/2}{k}/\binom{n}{k}$ (n parell)
$\mathrm{P}(\text{almenys un } x_i \text{ parell}) = 1 - \binom{(n+1)/2}{k}/\binom{n}{k}$ (n senar).

(b) X pren valors a $\{3, 4, \ldots, 11\}$, amb funció de probabilitat:

- $P_X(3) = P_X(4) = P_X(10) = P_X(11) = 1/15$, $P_X(5) = P_X(6) = P_X(8) = P_X(9) = 2/15$, i $P_X(7) = 3/15$.

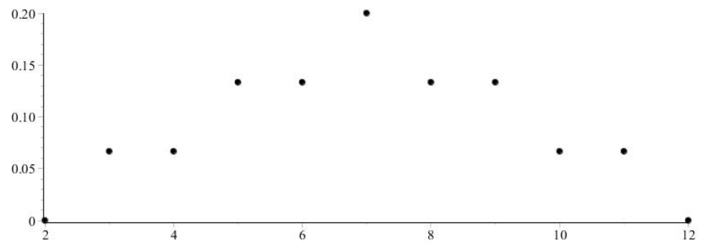

Figura 1: La funció de probabilitat P_X.

- $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=3}^{11} k P_X(k) = 7$,
- $\sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = 161/3 - 49 = 14/3$.

(c) Com abans, apliquem la fórmula de la probabilitat clàsica:

- $\mathrm{P}(x_2 > x_1) = \frac{C_{n,2}}{V_{n,2}} = \frac{\binom{n}{2}}{n(n-1)} = 1/2$. Lógicament, com les eleccions es fan de forma aleatòria, tenim que $\mathrm{P}(x_2 > x_1) = \mathrm{P}(x_2 < x_1) = 1/2$.
- $\mathrm{P}(x_1 < x_2 < \cdots < x_k) = \frac{C_{n,k}}{V_{n,k}} = \frac{\binom{n}{k}}{[n!/(n-k)!]} = 1/k!$. En el cas $k = n$, només hi ha un cas favorable: $x_i = i$ per a $i = 1, \ldots, n$. Per tant, la probabilitat demanada és $1/n!$.

2. Les variables aleatòries X i Y donen, respectivament, els instants d'arribada del primer i segon paquets de dades a un punt d'una xarxa. La seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2y}, & 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

(a) Calculeu les funcions de densitat marginals de X i Y. Quin és el temps mitjà que transcorre entre el primer i el segon paquets?

(b) Calculeu el coeficient de correlació ρ entre X i Y. Què podem dir de la independència de X i Y a partir d'aquest valor?

(c) Es defineixen les noves variables aleatòries $U = X$, $V = \dfrac{Y}{X}$. Calculeu la densitat conjunta de (U,V) indicant la seva regió de validesa. Calculeu la densitat marginal de V i utilitzeu-la per calcular la probabilitat que $Y > 2X$ i estudiar el comportament de $E\left[\dfrac{Y}{X}\right]$.

Indicació: $\displaystyle\int_0^\infty z^n e^{-az}dz = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

Solució:

(a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^\infty 4e^{-2y}dy = 2e^{-2x}, \qquad x > 0.$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 4e^{-2y}dx = 4ye^{-2y}, \qquad y > 0.$$

El temps entre el primer i segon paquet és $\Delta = Y - X$.

$$E[\Delta] = E[Y] - E[X] = \int_0^\infty y \cdot 4ye^{-2y}dy - \int_0^\infty x \cdot 2e^{-2x}dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Ja hem vist $E[X] = \dfrac{1}{2}$, $E[Y] = 1$.

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \cdot 2e^{-2x}dx = \frac{1}{2}, \qquad E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 \cdot 4ye^{-2y}dy = \frac{3}{2}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_Y = \sqrt{E[Y^2] - E[Y]^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^\infty dy \int_0^y dxxy4e^{-2y}$$

$$= 2\int_0^\infty dyy^3e^{-2y} = \frac{3}{4}.$$

$$C[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\rho = \frac{C[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707.$$

Sent $\rho \neq 0$ les variables no són independents, ja que independència implica incorrelació.

(c) Invertint la relació, trobem $X = U$ i $Y = UV$. El jacobià és:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

llavors

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 4ue^{-2uv}, \qquad (u,v) \in \mathcal{R}.$$

La regió $\mathcal{R}$ és $0 < u < uv < \infty$, és a dir $\mathcal{R} = \{(u,v)|0 < u < \infty, 1 < v < \infty\}$.

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_0^{\infty} 4ue^{-2uv}du = \frac{1}{v^2}, \qquad 1 < v < \infty.$$

$$P(Y > 2X) = P(V > 2) = \int_2^{\infty} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{2}.$$

$$E\left[\frac{Y}{X}\right] = E[V] = \int_1^{\infty} v\frac{dv}{v^2} = [\ln v]_1^{\infty} = \infty.$$

La variable V té esperança infinita.

3. Donades les variables aleatòries Φ i X, uniformes en $(0, \pi/4)$ i $(-1, 1)$ respectivament, i independents, es defineixen per a $t > 0$ els processos estocàstics:

$$Y(t) = t \cdot \operatorname{tg} \Phi \qquad \text{i} \qquad Z(t) = (t - X) \operatorname{tg} \Phi.$$

Es demana:

(a) Les funcions de distribució i de densitat de primer ordre del procés $Y(t)$, i la seva funció valor mitjà $m_Y(t)$.

(b) La funció valor mitjà $m_Z(t)$ i d'autocorrelació $R_Z(t_1, t_2)$.

(c) La millor estimació lineal homogènia de $Z(t_1)$ donat $Z(t_2)$.

Indicació: $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 u \, du = \operatorname{tg} u - u.$

Solució:

(a) Calculem en primer lloc la funció de distribució de probabilitat de primer ordre del procés $Y(t)$:

$$F_Y(y;t) \equiv F_{Y(t)}(y) = \mathrm{P}(Y(t) \leq y) = \mathrm{P}(t \cdot \operatorname{tg} \Phi \leq y) = \mathrm{P}\left(\operatorname{tg} \Phi \leq \frac{y}{t}\right).$$

Com que Φ és distribueix uniformement en $(0, \pi/4)$, la variable aleatòria $\operatorname{tg} \Phi$ pendrà valors en $(0, 1)$. Podem distingir el casos següents:

i. Cas $y < 0$.

$$F_{Y(t)}(y) = \mathrm{P}\left(\operatorname{tg} \Phi \leq \frac{y}{t}\right) = \mathrm{P}(\emptyset) = 0.$$

ii. Cas $0 \leq y < t$.

$$F_{Y(t)}(y) = \mathrm{P}\left(\operatorname{tg} \Phi \leq \frac{y}{t}\right) = \mathrm{P}\left(0 \leq \Phi \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{t}\right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{t}.$$

iii. Cas $y \geq t$.

$$F_{Y(t)}(y) = \mathrm{P}\left(\operatorname{tg} \Phi \leq \frac{y}{t}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

La densitat de primer ordre $f_Y(y;t)$ la obtenim derivant la distribució de primer ordre.

$$f_Y(y;t) \equiv f_{Y(t)}(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y;t) = \frac{4t}{\pi(t^2 + y^2)}, \quad 0 < y < t.$$

La funció valor mitjà $m_Y(t)$ és

$$m_Y(y) = \mathrm{E}(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y;t) \, dy = \frac{4t}{\pi} \int_0^t \frac{y}{t^2 + y^2} \, dy$$

$$= \frac{2t}{\pi} \ln (t^2 + y^2) \Big|_{y=0}^{y=t} = \frac{2t}{\pi} \ln 2.$$

També podem obtenir $m_Y(t)$ de la forma següent:

$$m_Y(y) = \mathrm{E}(Y(t)) = \mathrm{E}(t \cdot \operatorname{tg} \Phi) = t \, \mathrm{E}(\operatorname{tg} \Phi) = t \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tg} \phi \cdot f_\Phi(\phi) \, d\phi$$

$$= \frac{4t}{\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} \phi \, d\phi = \frac{4t}{\pi} \left(-\ln(\cos \phi)\right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\phi/4} = -\frac{4t}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2t}{\pi} \ln 2.$$

(b) Com que $Z(t) = Y(t) - X \operatorname{tg} \Phi$ tenim

$$m_Z(t) = \mathrm{E}(Z(t)) = \mathrm{E}(Y(t)) - \mathrm{E}(X \operatorname{tg} \Phi) = m_Y(t) = \frac{2t}{\pi} \ln 2,$$

on s'ha tingut en compte que $\mathrm{E}(X \operatorname{tg} \Phi) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(\operatorname{tg} \Phi) = 0$ ja que X i Φ són independents i $\mathrm{E}(X) = 0$.

D'altra banda,

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= \mathrm{E}(Z(t_1)Z(t_2)) = \mathrm{E}\left((Y(t_1) - X \operatorname{tg} \Phi)(Y(t_2) - X \operatorname{tg} \Phi)\right) \\ &= \left(t_1 t_2 + \mathrm{E}(X^2)\right) \mathrm{E}(\operatorname{tg}^2 \Phi) = \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\left(t_1 t_2 + \frac{1}{3}\right), \end{aligned}$$

ja que

$$\begin{gathered} \mathrm{E}(Y(t_1)Y(t_2)) = t_1 t_2\, \mathrm{E}(\operatorname{tg}^2 \Phi), \\ \mathrm{E}(Y(t_i) X \operatorname{tg} \Phi) = t_i\, \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(\operatorname{tg}^2 \Phi) = 0, \quad i = 1, 2, \\ \mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \end{gathered}$$

i

$$\mathrm{E}(\operatorname{tg}^2 \Phi) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 \phi \, d\phi = \frac{4}{\pi} \left(\operatorname{tg} \phi - \phi\right) \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} = \frac{4}{\pi} - 1.$$

(c) Sigui $\widehat{Z(t_1)} = \alpha Z(t_2)$. El valor òptim de la constant α s'obté quan $Z(t_1) - \widehat{Z(t_1)}$ és ortogonal a $Z(t_2)$. És a dir,

$$\mathrm{E}\left((Z(t_1) - \alpha Z(t_2)) Z(t_2)\right) = 0.$$

Per tant,

$$\alpha = \frac{R_Z(t_1, t_2)}{R_Z(t_2, t_2)} = \frac{3 t_1 t_2 + 1}{3 t_2^2 + 1},$$

d'on

$$\widehat{Z(t_1)} = \frac{3 t_1 t_2 + 1}{3 t_2^2 + 1} Z(t_2).$$