ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final **7 de gener de 2015**
Notes provisionals: 19/1, visualització exàmens corregits: 20/1, al·legacions: 21/1, notes definitives: 22/1. **Temps: 3h**

---

1. Els paquets de dades que arriben a un punt d'una xarxa de comunicació han de passar un procés que té probabilitat 0,3 de fallar. Cada paquet repeteix el procés tantes vegades com sigui necessari per fer-se amb èxit. El nombre de vegades que cal fer el procés l'anomenem *retard* R del paquet.

(a) Quin és el valor mitjà i la desviació estàndard del retard? Calcula la probabilitat que el segon paquet tingui retard superior al primer (indicació: la probabilitat demanada es pot relacionar amb la probabilitat que tinguin el mateix retard).

(b) En 10 paquets, calculeu la probabilitat que n'hi hagi algun amb retard superior a 5. Compareu-la amb la probabilitat que hi hagi exactament un o dos paquets amb retard superior a 5. En 100 paquets, quin és el valor mitjà i la desviació del nombre de paquets amb retard superior a 5?

(c) Considerem ara que hi ha dos tipus de paquets. Els de tipus A tenen un retard com el que es descriu a l'enunciat. Els de tipus B tenen un retard que pren valors $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ equiprobables. De paquets tipus B n'arriben un 25%. Si arriba un paquet amb retard igual a 4, quina és la probabilitat que sigui de tipus B?

Indicació: $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x} \qquad |x| < 1.$

2. Donat el valor d'una variable aleatòria X amb funció de densitat $f_X(x) = \alpha x^2 e^{-\lambda x}$, $x > 0$, la variable aleatòria condicionada $Y|X$ té com a funció de densitat $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{2}{x^2}y,\ \ 0 < y < x$.

(a) Demostreu que $\alpha = \lambda^3/2$ i trobeu la funció de densitat conjunta de (X, Y), indicant la regió de validesa.

(b) Calculeu les funcions de densitat de Y i de $X|Y$, i l'esperança $E(Y)$ (a partir de $f_Y(y)$ i a partir de $E(Y|X)$).

(c) Calculeu la covariància i el coeficient de correlació de X i Y. Són incorrelades?

Indicació: $\displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!.$

3. Donades les variables aleatòries A, B, incorrelades, ambdues amb valor mitjà m i variància σ^2, es defineix el procés estocàstic:

$$S(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

amb $\omega > 0$.

(a) Calculeu el seu valor mitjà $m_S(t)$ i la seva funció d'autocorrelació $R_S(t_1, t_2)$. Determineu en quins casos és estacionari en sentit ampli.

SEGUEIX AL DARRERE

(b) Si $m = 0$, trobeu la millor estimació lineal de $S(t_1)$ donat $S(t_2)$ en els casos $t_1 \geq t_2$ i $t_2 \geq t_1$. Interpreteu el resultat (és una estimació homogènia? Què passa quan $t_2 \to t_1$?).

(c) Si A, B són uniformes a $(0, 1)$ i independents, calculeu l'estadística de primer ordre del procés; és a dir, la funció de densitat $f_{S(t)}(s)$ de la variable aleatòria $S(t)$ per a t fixat, $0 < t < \frac{\pi}{4\omega}$ (on $\cos(\omega t) > \sin(\omega t)$). Comproveu que, aleshores, el valor mitjà $m_S(t)$ obtingut a partir de $f_{S(t)}$ coincideix amb l'obtingut per a aquest cas a l'apartat (a).