ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'Examen final **7 de gener de 2015**

---

1. Els paquets de dades que arriben a un punt d'una xarxa de comunicació han de passar un procés que té probabilitat 0,3 de fallar. Cada paquet repeteix el procés tantes vegades com sigui necessari per fer-se amb èxit. El nombre de vegades que cal fer el procés l'anomenem *retard* R del paquet.

(a) Quin és el valor mitjà i la desviació estàndard del retard? Calcula la probabilitat que el segon paquet tingui retard superior al primer (indicació: la probabilitat demanada es pot relacionar amb la probabilitat que tinguin el mateix retard).

(b) En 10 paquets, calculeu la probabilitat que n'hi hagi algun amb retard superior a 5. Compareu-la amb la probabilitat que hi hagi exactament un o dos paquets amb retard superior a 5. En 100 paquets, quin és el valor mitjà i la desviació del nombre de paquets amb retard superior a 5?

(c) Considerem ara que hi ha dos tipus de paquets. Els de tipus A tenen un retard com el que es descriu a l'enunciat. Els de tipus B tenen un retard que pren valors $R \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ equiprobables. De paquets tipus B n'arriben un 25%. Si arriba un paquet amb retard igual a 4, quina és la probabilitat que sigui de tipus B?

Indicació: $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x} \qquad |x| < 1.$

Solució:

(a) R és una variable geomètrica amb paràmetre $p = 0{,}7$. El seu valor mitjà és $\frac{1}{p} = 1{,}4$ i la seva desviació és $\frac{\sqrt{q}}{p} = 0{,}8$. Anomenem R_1, R_2 els dos retards, variables independents del mateix tipus. Llavors $P(R_2 > R_1) = P(R_1 > R_2)$ i $P(R_2 > R_1) + P(R_1 > R_2) + P(R_1 = R_2) = 1$, d'on $P(R_2 > R_1) = \frac{1}{2}(1 - P(R_1 = R_2))$.

$$P(R_1 = R_2) = \sum_{k=1}^{\infty} P(R_1 = k)P(R_2 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2(k-1)}p^2$$
$$= p^2(1 + q^2 + q^4 + \cdots) = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = 0{,}5384.$$

$P(R_2 > R_1) = 0{,}2307$.

(b) Per a un paquet, $P(R > 5) = 1 - F_R(5) = q^5 = 0{,}00243$.
$P(\text{algun paquet amb } R > 5) = 1 - P(\text{tots els paquets amb } R \leq 5) = 1 - P(R \leq 5)^{10} = 1 - 0{,}99757^{10} = 0{,}0240$.
El nombre N de paquets amb $R > 5$ és una variable binomial amb $n = 10$, $p = 0{,}00243$. $P(N = 1) = 10 \cdot 0{,}00243(1 - 0{,}00243)^9 = 0{,}02377$ i $P(N = 1) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}00243^2(1 - 0{,}00243)^8 = 0{,}00026$. Així, la probabilitat que hi hagi algun paquet amb retard superior a 5 prové pràcticament tota del cas en que hi ha un sol d'aquetst paquets. Això és deu a que $P(R > 5)$ és prou petit per a que la probabilitat de donar-se en dos paquets o més és despreciable en comparació amb la d'un paquet.
Si $n = 100$, $E[N] = np = 100 \cdot 0{,}00243 = 0{,}24$, $\sigma_N = \sqrt{np(1-p)} = 0{,}49$.

(c) $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}25$, $P(R = 4|A) = 0{,}3^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}0189$, $P(R = 4|B) = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Aplicant Bayes:

$$P(B|R = 4) = \frac{P(R = 4|B)P(B)}{P(R = 4|A)P(A) + P(R = 4|B)P(B)} = 0{,}7791.$$

2. Donat el valor d'una variable aleatòria X amb funció de densitat $f_X(x) = \alpha x^2 e^{-\lambda x}$, $x > 0$, la variable aleatòria condicionada $Y|X$ té com a funció de densitat $f_{Y|X}(y|x) = \frac{2}{x^2}y, \;\; 0 < y < x$.

(a) Demostreu que $\alpha = \lambda^3/2$ i trobeu la funció de densitat conjunta de (X, Y), indicant la regió de validesa.

(b) Calculeu les funcions de densitat de Y i de $X|Y$, i l'esperança $E(Y)$ (a partir de $f_Y(y)$ i a partir de $E(Y|X)$).

(c) Calculeu la covariància i el coeficient de correlació de X i Y. Són incorrelades?

Indicació: $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$.

Solució:

(a) Recordem primer que, fent el canvi $x = \lambda t$ a l'integral de la *Indicació*, s'obté que el moment d'ordre n d'una variable aleatòria exponencial val $m_n = \int_0^\infty t^n \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^n}$, $n = 1, 2, \ldots$

- Per tant,

$$\alpha \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda} dx = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2\alpha}{\lambda^3} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \lambda^3/2.$$

- Utilitzant la fórmula corresponent:

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y) f_X(x) = \frac{2}{x^2} y \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} = \lambda^3 y e^{-\lambda x}, \qquad x > y > 0.$$

(Veure Fig. 1 on hem escollit $\lambda = 2$).

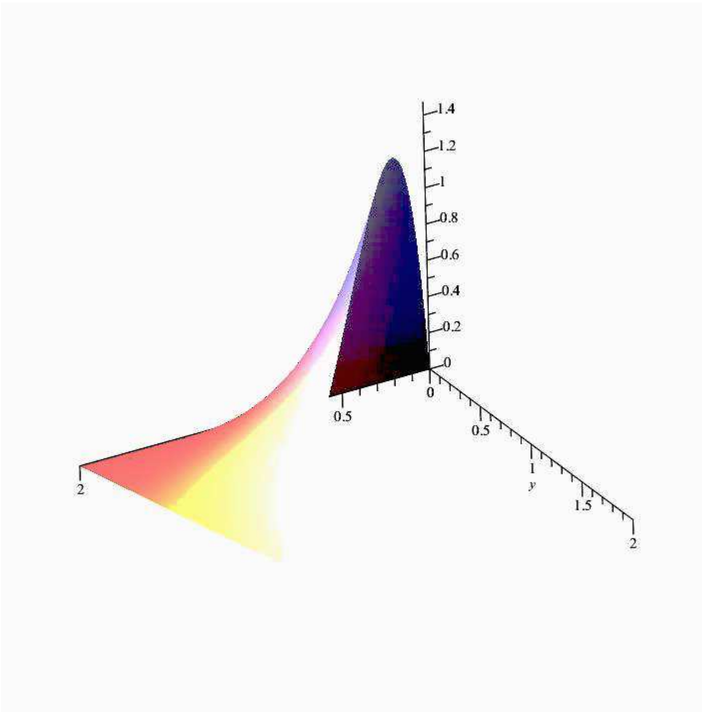

Figura 1: La funció de densitat de (X, Y) amb $\lambda = 2$.

(b) • $f_Y(y) = \int_{-\infty}^\infty f_{XY}(x, y) dx = y \int_{x=y}^\infty \lambda^3 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 y e^{-\lambda y}, \qquad y > 0.$

- $f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\lambda^3 y e^{-\lambda x}}{\lambda^2 y e^{-\lambda y}} = \lambda e^{-(x-y)}, \qquad x > y.$

  Es tracta d'una variable aleatòria exponencial desplaçada un valor y.

- $\mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \lambda \int_0^{\infty} \lambda y^2 e^{-\lambda y} = 2/\lambda.$

  Alternativament, com
  $\mathrm{E}(Y|X) = \int_0^x y f_{Y|X}(y) dy = \frac{2}{x^2} \int_0^x y^2 dx = \frac{2x}{3}$,
  i
  $\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^{\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^2}{2}\frac{3!}{\lambda^3} = \frac{3}{\lambda}$, obtenim:

  $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(\frac{2X}{3}) = \frac{2}{3}\mathrm{E}(X) = 2/\lambda.$

  La variable aleatòria Y és la suma de dues variables aleatòries exponencials independents de paràmetre λ.

(c) - Calculem primer la correlació de X, Y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y) dx\, dy = \lambda^3 \int_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda x} \int_{y=0}^{x} y^2 dy\, dx \\
&= \frac{\lambda^2}{3} \int_0^{\infty} \lambda x^4 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^2}{3}\frac{4!}{\lambda^4} = \frac{8}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Aleshores, la covariància és:

$$\mu_{1,1} = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{8}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda}\frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} (\neq 0),$$

de manera que X, Y no són incorrelades.

Per altra banda,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{\infty} x^4 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^2}{2}\frac{4!}{\lambda^4} = \frac{12}{\lambda^2} \quad &\Longrightarrow \quad \sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X) = \frac{3}{\lambda^2}, \\
\mathrm{E}(Y^2) &= \lambda \int_0^{\infty} y^3 \lambda e^{-\lambda y} dy = \lambda \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^2} \quad &\Longrightarrow \quad \sigma_Y^2 = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}^2(Y) = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Per tant, el coeficient de correlació és:

$$\rho = \frac{\mu_{1,1}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{2/\lambda^2}{(\sqrt{3}/\lambda)(\sqrt{2}/\lambda)} = \sqrt{2/3}.$$

3. Donades les variables aleatòries A, B, incorrelades, ambdues amb valor mitjà m i variància σ^2, es defineix el procés estocàstic:

$$S(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

amb $\omega > 0$.

(a) Calculeu el seu valor mitjà $m_S(t)$ i la seva funció d'autocorrelació $R_S(t_1, t_2)$. Determineu en quins casos és estacionari en sentit ampli.

(b) Si $m = 0$, trobeu la millor estimació lineal de $S(t_1)$ donat $S(t_2)$ en els casos $t_1 \geq t_2$ i $t_2 \geq t_1$. Interpreteu el resultat (és una estimació homogènia? Què passa quan $t_2 \to t_1$?).

(c) Si A, B són uniformes a $(0, 1)$ i independents, calculeu l'estadística de primer ordre del procés; és a dir, la funció de densitat $f_{S(t)}(s)$ de la variable aleatòria $S(t)$ per a t fixat, $0 < t < \frac{\pi}{4\omega}$ (on $\cos(\omega t) > \sin(\omega t)$). Comproveu que, aleshores, el valor mitjà $m_S(t)$ obtingut a partir de $f_{S(t)}$ coincideix amb l'obtingut per a aquest cas a l'apartat (a).

Solució:

(a) Utilitzant que l'esperança és un operador lineal i que A, B són incorrelades, és a dir, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B)$, tenim:

- $m_S(t) = \mathrm{E}(S(t)) = \mathrm{E}(A)\cos(\omega t) + \mathrm{E}(B)\sin(\omega t)) = m(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$.

- De manera semblant,

$$\begin{aligned} R_S(t_1,t_2) &= \mathrm{E}(S(t_1)S(t_2)) = \mathrm{E}([A\cos(\omega t_1) + B\sin(\omega t_1][A\cos(\omega t_2) + B\sin(\omega t_2)]) \\ &= \mathrm{E}(A^2)\cos(\omega t_1) + \mathrm{E}(B^2)\sin(\omega t_2) + \mathrm{E}(AB)(\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\cos(\omega t_2)) \\ &= E(A^2)\cos(\omega t_1 - \omega t_2) + \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B)\sin(\omega t_1 + \omega t_2) \\ &= (\sigma^2 + m^2)\cos(\omega|\tau|) + m^2\sin(\omega[t_1 + t_2]), \end{aligned}$$

  ja que $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2 + m^2$, i on $\tau = t_1 - t_2$.

- Per tant, $S(t)$ és estacionari en sentit ampli quan $m = 0$.

(b) La millor estimació lineal és de la forma $\widehat{S(t_1)} = \alpha S(t_2) + \beta$. Aleshores, amb $m = 0$ i utilizant el principi d'ortogonalitat,

$$\begin{array}{lcl} S(t_1) - \widehat{S(t_1)} \;\perp\; S(t_2) & \Longrightarrow & \mathrm{E}[(S(t_1) - \alpha S(t_2) - \beta)S(t_2)] = 0, \\ S(t_1) - \widehat{S(t_1)} \;\perp\; 1 & \Longrightarrow & \mathrm{E}[S(t_1) - \alpha S(t_2) - \beta] = 0, \end{array}$$

s'obté:

$$\beta = 0, \qquad \alpha = \frac{R_X(t_1,t_2)}{R_X(t_2,t_2)} = \cos(\omega|\tau|) \quad \text{amb} \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Per tant, $\widehat{S(t_1)} = S(t_2)\cos(\omega|\tau|)$ en tots dos casos $t_1 \geq t_2$ i $t_2 \geq t_1$.

És una estimació homogènia. Quan $t_2 \to t_1$, aleshores $\widehat{S(t_1)} \to S(t_2)$.

(c) Siguin $X = A\cos(\omega t)$ i $Y = B\sin(\omega t)$. Aleshores, X, Y són variables aleatòries independents, amb distribució uniforme a $[0, \cos(\omega t)]$ i $[0, \sin(\omega t)]$, respectivament. Per tant,

$$f_{S(t)}(s) = (f_X * f_Y)(s) = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \frac{s}{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}, & 0 \leq t \leq \sin(\omega t), \\ \frac{1}{\cos(\omega t)}, & \sin(\omega t) \leq t \leq \cos(\omega t), \\ \frac{\cos(\omega t)+\sin(\omega t)-s}{\cos(\omega t)\sin(\omega t)}, & \cos(\omega t) \leq t \leq \cos(\omega t) + \sin(\omega t), \\ 0 & t \geq \cos(\omega t) + \sin(\omega t). \end{cases}$$

Veure la gràfica a la Fig.2.

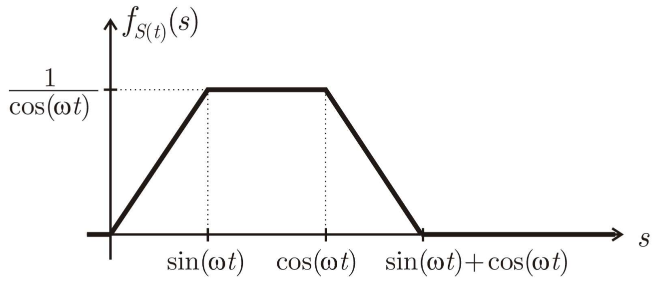

Figura 2: La funció de densitat de $S(t)$.

Degut a la simetria de $f_{S(t)}$ respecte al punt $\frac{1}{2}(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$, aquest valor correspon a la mitjana $m_S(t) = \mathrm{E}\{S(t)\}$, que coincideix amb l'obtingut a l'apartat (a) amb $m = 1/2$.