ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final **4 de juny de 2014**
Notes provisionals: 16/6, visualització exàmens corregits: 17/6, al·legacions: 19/6, notes definitives: 20/6. **Temps: 3h**

---

1. Una font emet aleatòriament, a intervals regulars i de manera independent, un dígit (o xifra) del conjunt $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Es demana:

(a) La probabilitat que la segona xifra emesa sigui més gran que la primera.

(b) El nombre mitjà de dígits emesos fins que s'emet una xifra $\leq n$, per a $n = 0, 1, \ldots, 9$.

(c) Si la font emet un codi de 8 xifres, quina és la probabilitat que totes siguin diferents? I la probabilitat que el codi tingui almenys un 0?

(d) Sabent que la mitjana aritmètica els dos primers dígits és 8, calculeu la probabilitat que el segon dígit sigui almenys 8.

2. Un raig làser incideix en un punt del pla que ve determinat per una variable aleatòria 2-dimensional (X, Y) amb funció de densitat $f_{XY}(x, y) = \alpha e^{-(x^2+y^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Es demana:

(a) Calculeu el valor de α. (Podeu fer servir coordenades polars).

(b) Trobeu les funcions de densitat de les marginals X i Y. De quines variables es tracta? Quina és la seva esperança i variància. Són independents?

(c) Considerant la funció de pas a coordenades polars, amb radi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i angle $\phi = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi)$, calculeu la funció de densitat de la nova variable aleatòria (R, Φ). Quin tipus de variable aleatòria és Φ?

(d) Si es pretén que el làser incideixi a una distància ≤ 1 del centre $(0, 0)$, calculeu la probabilitat de tenir "èxit".

3. El següent procés estocàstic es pot veure com la versió discreta d'un procés de Poisson: A cada instant de temps $n = 1, 2, 3, \ldots$, un ordinador accedeix, amb probabilitat $p \in (0, 1)$ i de manera independent, a una memòria. Si $X[n]$ representa el nombre d'accessos realitzats en n instants, el procés discret $X[n]$, $n = 1, 2, \ldots$, té, com a estadística de primer ordre, la variable aleatòria $X[n]$ amb funció de probabilitat $P_{X[n]}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, on $q = 1 - p$, i $k = 0, 1, \ldots, n$. Es demana:

(a) Calculeu les funcions valor mitjà $m_X[n]$ i d'autocorrelació $R_X[n_1, n_2]$.

(b) La funció de distribució $F_T(n)$ i la funció de probabilitat $P_T[n] = \mathrm{P}(T = n)$, per a $n = 1, 2, \ldots$, de la variable aleatòria T que representa el temps transcorregut fins que es produeix la primera transició, és a dir, el valor més petit de n per el qual $X[n] = 1$.
(Noteu que, per a $n = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{P}(T \leq n) = \mathrm{P}(T \leq n - 1) + \mathrm{P}(T = n)$).

(c) Trobeu la millor estimació lineal de $X[n_1]$ donat $X[n_2]$ distingint els casos $n_1 \geq n_2$ i $n_2 \geq n_1$.