

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'Examen final

4 de juny de 2014

1. Una font emet aleatòriament, a intervals regulars i de manera independent, un dígit (o xifra) del conjunt $\{0, 1, \dots, 9\}$. Es demana:
- La probabilitat que la segona xifra emesa sigui més gran que la primera.
 - El nombre mitjà de dígits emesos fins que s'emeta una xifra $\leq n$, per a $n = 0, 1, \dots, 9$.
 - Si la font emet un codi de 8 xifres, quina és la probabilitat que totes siguin diferents? I la probabilitat que el codi tingui almenys un 0?
 - Sabent que la mitjana dels dos primers dígits és 8, calculeu la probabilitat que el segon dígit sigui almenys 8.

Solució:

Denotem per X_i , $i \geq 1$, el valor del dígit i -èssim emès de forma independent, on $X_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Per exemple, 74559000213787...

- (a) Suposem que $X_1 = k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(X_2 > X_1) &= \sum_{k=0}^9 P(X_2 > X_1 \mid X_1 = k)P(X_1 = k) \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 \frac{10 - (k+1)}{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \dots + \frac{9}{10} \right) = \frac{45}{100} = 0.45. \end{aligned}$$

Alternativament, també es pot emprar la definició clàssica:

$$P(X_2 > X_1) = \frac{\# \text{ casos favorables}}{\# \text{ casos possibles}} = \frac{\binom{10}{2}}{10^2} = 0.45.$$

- (b) La variable aleatòria que compta el nombre de dígits emesos fins que surt una xifra $k \leq n$ és $Y \sim \text{Geom}\left(\frac{n+1}{10}\right)$. D'on,

$$E(Y) = \frac{10}{n+1}.$$

- (c) La probabilitat que totes les xifres siguin diferents és

$$P(X_i \neq X_j : 1 \leq i < j \leq 8) = \frac{V_{10,8}}{VR_{10,8}} = \prod_{i=3}^{10} \frac{i}{10} = \frac{9!}{2 \cdot 10^7} \approx 0.0181,$$

i la probabilitat que el codi tingui al menys un 0,

$$1 - P(X_i \neq 0 : 1 \leq i \leq 8) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^8 \approx 0.5695.$$

- (d) Suposem que $(X_1 + X_2)/2 = 8$. Per tant,

$$P(X_2 \geq 8 \mid X_1 + X_2 = 16) = \frac{P(X_2 \geq 8, X_1 + X_2 = 16)}{P(X_1 + X_2 = 16)} = \frac{2/100}{3/100} = \frac{2}{3}.$$

2. Un raig làser incideix en un punt del pla que ve determinat per una variable aleatòria 2-dimensional (X, Y) amb funció de densitat $f_{XY}(x, y) = \alpha e^{-(x^2+y^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Es demana:
- Calculeu el valor de α . (Podeu fer servir coordenades polars).
 - Trobeu les funcions de densitat de les marginals X i Y . De quines variables es tracta? Quina és la seva esperança i variància. Són independents?
 - Considerant la funció de pas a coordenades polars, amb radi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i angle $\phi = \arctan(y/x) \in [0, 2\pi)$, calculeu la funció de densitat de la nova variable aleatòria (R, Φ) . Quin tipus de variable aleatòria és Φ ?
 - Si es pretén que el làser incideixi a una distància ≤ 1 del centre $(0, 0)$, calculeu la probabilitat de tenir "èxit".

Solució:

- (a) Passant a coordenades polars,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r \alpha e^{-r^2} dr d\phi = \alpha \pi = 1,$$

d'on $\alpha = 1/\pi$.

- (b) De l'apartat anterior,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2,$$

d'on

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

i

$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Per tant, X i Y són gaussianes independents d'esperança $m = 0$ i variància $\sigma^2 = 1/2$.

- (c)

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = \frac{f_{XY}(x, y)}{\left| J \begin{pmatrix} r & \phi \\ x & y \end{pmatrix} \right|} = r f_{XY}(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{r e^{-r^2}}{\pi}, \quad r \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi.$$

D'on resulta que la variable aleatòria Φ és uniforme a $[0, 2\pi)$ ja que

$$f_{\Phi}(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

- (d) Com $R = \Gamma(2, r)$ té funció de densitat $f_R(r) = 2r e^{-r^2}$, $r \geq 0$, es té que

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in D) &= P(R \leq 1) = \int_0^1 2r e^{-r^2} dr \\ &= 1 - e^{-1} \approx 0.6321. \end{aligned}$$

3. El següent procés estocàstic es pot veure com la versió discreta d'un procés de Poisson: A cada instant de temps $n = 1, 2, 3, \dots$, un ordinador accedeix, amb probabilitat $p \in (0, 1)$ i de manera independent, a una memòria. Si $X[n]$ representa el nombre d'accessos realitzats en n instants, el procés discret $X[n]$, $n = 1, 2, \dots$, té, com a estadística de primer ordre, la variable aleatòria $X[n]$ amb funció de probabilitat $P_{X[n]}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, on $q = 1 - p$, i $k = 0, 1, \dots, n$. Es demana:

- (a) Calculeu les funcions valor mitjà $m_X[n]$ i d'autocorrelació $R_X[n_1, n_2]$.
- (b) La funció de distribució $F_T(n)$ i la funció de probabilitat $P_T[n] = P(T = n)$, per a $n = 1, 2, \dots$, de la variable aleatòria T que representa el temps transcorregut fins que es produeix la primera transició, és a dir, el valor més petit de n per el qual $X[n] = 1$.
(Noteu que, per a $n = 1, 2, \dots$, $P(T \leq n) = P(T \leq n - 1) + P(T = n)$).
- (c) Trobeu la millor estimació lineal de $X[n_1]$ donat $X[n_2]$ distingint els casos $n_1 \geq n_2$ i $n_2 \geq n_1$.

Solució:

- (a) Com que, per a n fixat, $X[n]$ és una variable aleatòria binomial, tenim que $m_X[n] = E(X[n]) = np$.
Si $n_2 \geq n_1$ aleshores $X[n_2] = X[n_1] + X[n_2 - n_1]$, essent les dues variables independents i

$$\begin{aligned} R_X[n_1, n_2] &= E(X[n_1]X[n_2]) = E(X[n_1](X[n_1] + X[n_2 - n_1])) \\ &= E(X^2[n_1]) + E(X[n_1])E(X[n_2 - n_1]) \\ &= \text{Var}(X[n_1]) + E^2(X[n_1]) + n_1 p(n_2 - n_1)p \\ &= n_1 p q + n_1^2 p^2 + n_1 n_2 p^2 - n_1^2 p^2 = p^2 n_1 n_2 + p q n_1. \end{aligned}$$

Aleshores, en general queda

$$R_X[n_1, n_2] = p^2 n_1 n_2 + p q \min\{n_1, n_2\}.$$

- (b) Per a $n = 1, 2, \dots$, tenim que

$$F_T(n) = P(T \leq n) = 1 - P(T > n) = 1 - P(X[n] = 0) = 1 - q^n,$$

i així, com que $P_T(n) = F_T(n) - F_T(n - 1)$, obtenim

$$P_T(n) = q^{n-1} - q^n = p q^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Per tant, T és una variable Geom(p). A més,

$$F_T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} u(t - n), \quad t > 0.$$

- (c) Amb $\widehat{X[n_1]} = \alpha X[n_2] + \beta$, i aplicant el principi d'ortogonalitat ("error ortogonal a dades"), obtenim les equacions

$$\begin{aligned} E((X[n_1] - \alpha X[n_2] - \beta) \cdot 1) &= 0, \\ E((X[n_1] - \alpha X[n_2] - \beta) X[n_2]) &= 0. \end{aligned}$$

És a dir,

$$\begin{pmatrix} m_X[n_2] & 1 \\ R_X[n_2, n_2] & m_X[n_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_X[n_1] \\ R_X[n_1, n_2] \end{pmatrix},$$

d'on

$$\alpha = \frac{C_X[n_1, n_2]}{C_X[n_2, n_2]}, \quad \beta = m_X[n_1] - \frac{C_X[n_1, n_2]}{C_X[n_2, n_2]} m_X[n_2].$$

Per tant, utilitzant que l'autocovariància és

$$C_X[n_1, n_2] = R_X[n_1, n_2] - m_X[n_1]m_X[n_2] = pq \min\{n_1, n_2\},$$

obtenim:

- Si $n_1 \geq n_2$, $\widehat{X[n_1]} = X[n_2] + (n_1 - n_2)p$.
- Si $n_1 \leq n_2$, $\widehat{X[n_1]} = \frac{n_1}{n_2} X[n_2]$.