

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final

21 de gener de 2014

Notes provisionals: 27/1, visualització exàmens corregits: veure Atenea, al·legacions: 28/1, notes definitives: 29/1.

Temps: 3h

1. Els ordinadors disponibles en certa regió presenten tres possibles sistemes operatius (SO): A , B i C . Es constitueixen grups de tres ordinadors triats independentment per realitzar un càlcul. Anomenem N el nombre de diferents SO presents en un grup donat. El temps (en segons) que triga un grup en fer el càlcul és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 4 - N$.
 - (a) Calculeu la funció de probabilitat de N , deixant el resultat en funció de les probabilitats (p_A, p_B, p_C) que un ordinador triat a l'atzar tingui cadascun dels SO.
 - (b) Particularitzeu el resultat anterior al cas en que els tres SO són equiprobables. Calculeu en aquest cas la probabilitat que un grup triat a l'atzar contingui el SO C si sabem que en aquest grup $N = 1$. Calculeu també aquesta probabilitat a priori i compareu-les.
 - (c) Considerem ara que en la població d'ordinadors disponibles un 70% té el SO A , un 20% el SO B i un 10% el C . Calculeu el temps mitjà de càlcul en el conjunt de tots els grups. Si una grup encara no ha finalitzat el càlcul passat 1 segon, quina és la probabilitat que els seus tres ordinadors tinguin el mateix SO?
 - (d) Amb els valors de p_A, p_B, p_C de l'apartat anterior: En certa àrea hi ha 25 grups de tres ordinadors. Calculeu el nombre mitjà i la desviació del nombre de grups amb els tres SO diferents. Quina és la probabilitat que no hi hagi cap grup d'aquest tipus?

2. Donada una variable aleatòria exponencial X de paràmetre λ , es considera la variable aleatòria condicionada $Y|X$ amb funció de densitat de $f_{Y|X}(y) = \lambda e^{-\lambda(y-x)}$, $y > x$. Es demana calcular:
 - (a) La funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y)$, i la funció de densitat marginal $f_Y(y)$.
 - (b) L'esperança $E(Y)$, directament a partir de $f_Y(y)$, i utilitzant la fórmula $E(Y) = E(E(Y|X))$.
 - (c) Donat un nombre real positiu α , la probabilitat $P(X \leq \alpha, Y > \alpha)$.

3.
 - (a) A partir de la variable aleatòria T , exponencial de paràmetre λ , es defineix el procés $X(t) = 1$ per a $t \in [0, T]$ i $X(t) = 0$ altrament. Calculeu la seva funció de valor mitjà i la seva autocorrelació. És un procés estacionari en sentit ampli?
 - (b) Si $X(t)$ és el procés senyal telegràfic semialeatori, calculeu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t_2)$ en termes de $X(t_1)$ amb $t_1 \leq t_2$.
 - (c) Si $X_1(t)$ i $X_2(t)$ són processos de Poisson independents de paràmetre λ_1 i λ_2 , respectivament, calculeu l'estadística de primer ordre (funció de probabilitat) del procés suma $S(t) = X_1(t) + X_2(t)$. Quina classe de procés és?