

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'Examen final

21 de gener de 2014

1. Els ordinadors disponibles en certa regió presenten tres possibles sistemes operatius (SO): A , B i C . Es constitueixen grups de tres ordinadors triats independentment per realitzar un càlcul. Anomenem N el nombre de diferents SO presents en un grup donat. El temps (en segons) que triga un grup en fer el càlcul és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 4 - N$.
 - (a) Calculeu la funció de probabilitat de N , deixant el resultat en funció de les probabilitats (p_A, p_B, p_C) que un ordinador triat a l'atzar tingui cadascun dels SO.
 - (b) Particularitzeu el resultat anterior al cas en que els tres SO són equiprobables. Calculeu en aquest cas la probabilitat que un grup triat a l'atzar contingui el SO C si sabem que en aquest grup $N = 1$. Calculeu també aquesta probabilitat a priori i compareu-les.
 - (c) Considerem ara que en la població d'ordinadors disponibles un 70% té el SO A , un 20% el SO B i un 10% el C . Calculeu el temps mitjà de càlcul en el conjunt de tots els grups. Si una grup encara no ha finalitzat el càlcul passat 1 segon, quina és la probabilitat que els seus tres ordinadors tinguin el mateix SO?
 - (d) Amb els valors de p_A, p_B, p_C de l'apartat anterior: En certa àrea hi ha 25 grups de tres ordinadors. Calculeu el nombre mitjà i la desviació del nombre de grups amb els tres SO diferents. Quina és la probabilitat que no hi hagi cap grup d'aquest tipus?

Solució:

- (a) $N = 1$ correspon als casos $[AAA]$, $[BBB]$, $[CCC]$. $N = 2$ correspon als casos $[AAB]$, $[ABB]$, $[AAC]$, $[ACC]$, $[BBC]$, $[BCC]$, cadascun dels quals té 3 permutacions. $N = 3$ correspon al cas $[ABC]$ que té 3! permutacions. Llavors:

$$P(N=1) = p_A^3 + p_B^3 + p_C^3.$$

$$P(N=2) = 3(p_A^2 p_B + p_A p_B^2 + p_A^2 p_C + p_A p_C^2 + p_B^2 p_C + p_B p_C^2).$$

$$P(N=3) = 6p_A p_B p_C.$$

- (b) $p_A = p_B = p_C = \frac{1}{3}$.

$$P(N=1) = 3 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{9}, \quad P(N=2) = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{9}, \quad P(N=3) = 6 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{2}{9}.$$

A priori:

$$P(C \text{ en grup}) = 1 - P(\text{no } C \text{ en grup}) = 1 - (p_A + p_B)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} = 0,704.$$

$$P(C \text{ en grup} | N=1) = \frac{P(\text{tots } C)}{P(N=1)} = \frac{p_C^3}{p_A^3 + p_B^3 + p_C^3} = \frac{1}{3} = 0,33.$$

La probabilitat ha disminuït ja que les possibilitats d'aparició d'ordinadors tipus C es redueix si tots tres han de tenir el mateix SO.

(c) $P(N=1) = 0,7^3 + 0,2^3 + 0,1^3 = 0,352.$

$$P(N=2) = 1 - 0,352 - 0,084 = 0,564.$$

$$P(N=3) = 6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,084.$$

Si T és el temps que triga en fer-se el càlcul, T condicionada a $N = k$ és exponencial amb $\lambda = 4 - k$ i té esperança $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4-k}$:

$$\begin{aligned} E[T] &= \sum_{k=1}^3 E[T|N=k]P(N=k) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{4-k} P(N=k) = \\ &= \frac{1}{3}P(N=1) + \frac{1}{2}P(N=2) + P(N=3) = 0,4833. \end{aligned}$$

Tenint en compte que per una variable exponencial $P(X > x) = e^{-\lambda x}$:

$$\begin{aligned} P(N=1|T > 1) &= \frac{P(T > 1|N=1)P(N=1)}{\sum_{k=1}^3 P(T > 1|N=k)P(N=k)} \\ &= \frac{e^{-3} \cdot 0,352}{e^{-3} \cdot 0,352 + e^{-2} \cdot 0,564 + e^{-1} \cdot 0,084} = 0,1404. \end{aligned}$$

- (d) Si X és la variable que dóna el nombre de grups amb els tres SO diferents, X és binomial amb $n = 25$ i $p = P(N=3) = 0,084$. Llavors $m_X = np = 2,1$ i $\sigma_X = \sqrt{npq} = 1,38$. $P(X=0) = (1-p)^n = 0,916^{25} = 0,1115$.

2. Donada una variable aleatòria exponencial X de paràmetre λ , es considera la variable aleatòria condicionada $Y|X$ amb funció de densitat de $f_{Y|X}(y) = \lambda e^{-\lambda(y-x)}$, $y > x$. Es demana calcular:

- (a) La funció de densitat conjunta $f_{XY}(x, y)$, i la funció de densitat marginal $f_Y(y)$.
- (b) L'esperança $E(Y)$, directament a partir de $f_Y(y)$, i utilitzant la fórmula $E(Y) = E(E(Y|X))$.
- (c) Donat un nombre real positiu α , la probabilitat $P(X \leq \alpha, Y > \alpha)$.

Solució:

- (a) La densitat marginal de X és $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

$$f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y)f_X(x) = \lambda e^{-\lambda(y-x)}\lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2 e^{-\lambda y}$$

en la regió $0 < x < y < \infty$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{XY}(x, y) = \int_0^y dx \lambda^2 e^{-\lambda y} = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \text{ per } y > 0.$$

$$(b) E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy y f_Y(y) = \int_0^{\infty} dy y \lambda^2 y e^{-\lambda y} = (\text{canvi } t = \lambda y) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} dt t^2 e^{-t} = \frac{2}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned} E(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy y f_{Y|X}(y) = \int_x^{\infty} dy y \lambda e^{-\lambda(y-x)} = (\text{canvi } t = y-x) \\ &= \int_0^{\infty} dt (x+t) \lambda e^{-\lambda t} = x + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Llavors:

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = E\left(X + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

- (c) L'esdeveniment correspon al rectangle $0 < x < \alpha$, $\alpha < y < \infty$, contingut en el domini de la variable (X, Y) .

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha, Y > \alpha) &= \int_0^{\alpha} dx \int_{\alpha}^{\infty} dy f_{XY}(x, y) = \\ &= \int_0^{\alpha} dx \int_{\alpha}^{\infty} dy \lambda^2 e^{-\lambda y} = \alpha \left[-\lambda e^{-\lambda y} \right]_{\alpha}^{\infty} = \lambda \alpha e^{-\lambda \alpha}. \end{aligned}$$

3. (a) A partir de la variable aleatòria T , exponencial de paràmetre λ , es defineix el procés $X(t) = 1$ per a $t \in [0, T]$ i $X(t) = 0$ altrament. Calculeu la seva funció de valor mitjà i la seva autocorrelació. És un procés estacionari en sentit ampli?
- (b) Si $X(t)$ és el procés senyal telegràfic semialeatori, calculeu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t_2)$ en termes de $X(t_1)$ amb $t_1 \leq t_2$.
- (c) Si $X_1(t)$ i $X_2(t)$ són processos de Poisson independents de paràmetre λ_1 i λ_2 , respectivament, calculeu l'estadística de primer ordre (funció de probabilitat) del procés suma $S(t) = X_1(t) + X_2(t)$. Quina classe de procés és?

Solució:

- (a) $X(t)$ és un procés d'estat discret amb valors 0, 1. $P(X(t) = 1) = P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\lambda t}$.

El seu valor mitjà és

$$m(t) = E(X(t)) = 0 \cdot P(X(t)=0) + 1 \cdot P(X(t)=1) = e^{-\lambda t}.$$

La seva autocorrelació:

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) \\ &= 0 \cdot 0 \cdot P(X(t_1)=0, X(t_2)=0) + 0 \cdot 1 \cdot P(X(t_1)=0, X(t_2)=1) \\ &\quad + 1 \cdot 0 \cdot P(X(t_1)=1, X(t_2)=0) + 1 \cdot 1 \cdot P(X(t_1)=1, X(t_2)=1) \\ &= P(X(t_1) = 1, X(t_2) = 1) = P(T > t_1, T > t_2) \\ &= P(T > \max(t_1, t_2)) = e^{-\lambda \max(t_1, t_2)}. \end{aligned}$$

El procés no és estacionari ja que $m(t)$ no és constant.

- (b) Estimem $X(t_2)$ per $\widehat{X(t_2)} = aX(t_1) + b$. Calculem a, b segons el principi d'ortogonalitat:

$$\begin{cases} E[(\widehat{X(t_2)} - X(t_2))X(t_1)] = 0 \\ E[(\widehat{X(t_2)} - X(t_2)) \cdot 1] = 0 \end{cases}$$

D'on,

$$\begin{cases} aE[X(t_1)^2] + bE[X(t_1)] = E[X(t_2)X(t_1)] \\ aE[X(t_1)] + b = E[X(t_2)] \end{cases}$$

Fent servir el valor mitjà i l'autocorrelació del senyal telegràfic semialeatori,

$$E[X(t)] = e^{-\lambda t}, \quad R_X(t_1, t_2) = e^{-2\lambda|t_2-t_1|},$$

$$\text{tenim } \begin{cases} a + be^{-2\lambda t_1} = e^{-2\lambda(t_2-t_1)} \\ ae^{-2\lambda t_1} + b = e^{-2\lambda t_2} \end{cases} \text{ que té solució } a = e^{-2\lambda(t_2-t_1)} \text{ i } b = 0.$$

- (c) $X_1(t)$ i $X_2(t)$ són d'estat discret amb valors 0, 1, 2, ... Llavors $S(t)$ també pren valors 0, 1, 2, ... i

$$\begin{aligned} P(S(t) = n) &= P(X_1(t) + X_2(t) = n) = \sum_{k=0}^n P(X_1(t) = k)P(X_2(t) = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} (\lambda_1 t)^k (\lambda_2 t)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (\lambda_1 t)^k (\lambda_2 t)^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

$S(t)$ és un procés de Poisson de paràmetre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.