

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final

14 de juny de 2013

Notes provisionals 25/6, alegacions 27/6, notes definitives 28/6. Temps: 3h

1. En un centre de càlcul hi ha ordinadors connectats a una xarxa que té dues seccions. En la secció S_1 hi ha quatre ordinadors i en la secció S_2 n'hi ha cinc. Un virus infecta un ordinador de S_1 i dos ordinadors de S_2 . Quan un usuari utilitza un ordinador infectat hi ha una probabilitat $\frac{3}{5}$ que els seus arxius s'infectin.
- Un procediment de verificació es basa en triar tres ordinadors a l'atzar dels nou disponibles. Calculeu la probabilitat que es triï com a màxim un ordinador infectat. Feu-ho pels dos esquemes següents: quan es trien els tres ordinadors diferents, per un costat, i quan es trien els tres ordinadors de forma independent (amb possible repetició, per tant), per l'altre. Indiqueu quina de les dues probabilitats és més alta i raoneu perquè.
 - Als usuaris que accedeixen a un ordinador se'ls assigna primer una secció, de manera que la probabilitat de triar S_1 val $\frac{2}{3}$, i després se'ls assigna a l'atzar un dels ordinadors de la secció elegida. Calculeu la probabilitat que s'infectin els arxius d'un usuari que accedeix al sistema. Si un usuari veu que els seus arxius s'han infectat, quina és la probabilitat que se li hagués assignat la secció S_1 ? Compareu amb la probabilitat a priori i comenteu si la variació és raonable.
 - Al sistema van accedint usuaris independents (seguint l'esquema de l'apartat (b)). Sigui N la variable que compta quants usuaris han accedit en el moment en que es produeix la primera infecció d'arxius. Trobeu el tipus de variable que és, la seva esperança i la probabilitat que $3 \leq N \leq 7$.

2. Donada la variable aleatòria bidimensional (X, Y) amb funció de densitat

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

es consideren les variables aleatòries

$$S = X + Y, \quad Q = \frac{Y}{X}.$$

Es demana:

- Les funcions de distribució marginals de S i Q .
 - La funció de densitat conjunta de (S, Q) .
 - Les funcions de densitat marginals de S i Q . Obtingueu aquestes densitats tant a partir de (a) com de (b). Són S i Q independents?
3. El nombre de viatgers que arriba a una terminal d'un aeroport segueix un procés de Poisson $X(t)$ amb paràmetre $\lambda = 15$ viatgers per minut.
- Trobeu la probabilitat que en 1 minut, en els primers 20 segons arribin 3 viatgers i en els últims 16 segons n'arribin 2.
 - Trobeu l'esperança i la variància del temps fins que arriba el desé viatger.
 - Trobeu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t)$ en funció de $X(t - 10)$ (temps expressat en segons). Calculeu l'error quadràtic mitjà que es comet amb aquesta estimació.