ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final **18 de gener de 2013**

Notes provisionals 24/1, al·legacions 27/1, notes definitives 28/1. **Temps: 3h**

---

1. En un sistema multiprocessador amb n processadors P_1,P_2,...,P_n i m memòries M_1, M_2,..., M_m, cada processador demana, independentment dels altres i amb igual probabilitat, accés a alguna memòria. Es demana:

(a) Sigui X la variable aleatòria que denota el nombre de processadors que demanen accés a la memòria M_1. Calcula la seva funció de probabilitat. De quina variable aleatòria es tracta? Quina és la probabilitat que la memòria M_1 estigui ocupada (és a dir, accedida per al menys un processador)? Quin és el nombre mitjà de processadors que demanen accés a la memòria M_1? Comenta el resultat.

(b) Sigui Y la variable aleatòria que correspon al nombre de memòries ocupades, i I_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, les variables aleatòries indicadores tals que $I_j = 1$ si la memòria M_j està ocupada i $I_j = 0$ altrament. Expressa Y en termes de les variables I_j i calcula el nombre mitjà de memòries ocupades (anomenat *ample de banda* B del sistema). A quins valors tendeix B quan m és molt gran (amb n finit) i quan n és molt gran (amb m finit)? Raona els resultats.

(c) Si el nombre m de memòries és molt gran ($m \to \infty$), i el temps d'accés a la memòria M_j és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = j$, calcula la probabilitat $P(T > 1)$, on T és un temps d'accés determinat (escollit a l'atzar). Comenta la lògica del resultat obtingut.

(d) Per a m molt gran i donat que un determinat temps d'accés ha sigut $T > 1$, quina és la probabilitat que es tractés de la memòria M_1?

2. En la superfície de cert material apareixen defectes en forma de rectangle d'amplada X i d'alçada Y, on (X, Y) és una variable bidimensional uniforme a la regió $\Omega_{XY} = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 6\}$. Considerem també la variable aleatòria A corresponent a l'àrea dels rectangles.

(a) Són X i Y independents? Troba els moments conjunts $m_{r,s} = E(X^r Y^s)$.

(b) Calcula el coeficient de correlació ρ entre A i X. Podem concloure'n alguna cosa sobre la independència entre A i X?

Indicació: fer servir els moments calculats a l'apartat (a).

(c) Dibuixa el domini de la variable (X, A), Ω_{XA}, i calcula la seva funció de densitat conjunta, $f_{XA}(x, a)$.

(d) Calcula la millor estimació de X donada A, $\widehat{X} = E(X|A = a)$.

SEGUEIX AL DARRERE

3. El nivell de càrrega en un acumulador d'energia ve donat pel procés estocàstic $X(t) = At + B$, per $t \geq 0$, on A i B són variables aleatòries uniformes en $[0, 2]$, independents.

(a) Calcula les funcions de valor mitjà, d'autocorrelació i d'autocovariància del procés $X(t)$. Es tracta d'un procés estacionari?

(b) Degut a fluctuacions ambientals un indicador de càrrega dóna el valor $Z(t) = X(t) + Y(t)$ on $Y(t)$ és un procés de senyal telegràfic aleatori de paràmetre λ, independent del procés $X(t)$. Calcula les funcions de valor mitjà i d'autocorrelació de $Z(t)$. Com difereixen la potència mitjana real (la de $X(t)$) i la potència mitjana en l'indicador?

(c) Calcula la millor estimació lineal no homogènia de $X(t)$ donat $Z(t)$.

(d) Determina l'error quadràtic mínim en l'anterior estimació i fes-ne una gràfica comparant-lo amb l'error que es tindria si s'hagués estimat $X(t)$ per una constant.