

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final

22 de juny de 2012

Notes provisionals 26/6, alegacions 29/6, notes definitives 30/6.

Temps: 3h

1. Un canal transmet paraules d'un codi. Cada paraula consta de 4 bits que s'envien de forma independent. La probabilitat que un bit arribi canviat és $\frac{1}{3}$. Per tal de fer més segura la transmissió enviem cada bit dues vegades de forma independent. Direm que tenim un error en un bit si les dues transmissions d'aquest han fallat. Si N és la variable aleatòria que compta el nombre d'errors en un paraula, la probabilitat de recuperar la paraula és:

$$P(\text{recuperar} \mid N=k) = 1 - \frac{k}{4} \text{ per a } 0 \leq k \leq 4.$$

- (a) Doneu la probabilitat que una paraula transmesa es pugui recuperar.
- (b) Quan el sistema ha rebut 4 paraules que no es poden recuperar, s'atura. Sigui T_i el nombre de paraules rebudes entre la $(i-1)$ -èsima no recuperable i la i -èsima no recuperable (contant aquesta última). Justifiqueu que les variables T_i són independents i digueu de quin tipus de variable es tracten. El nombre de paraules transmeses quan el sistema s'atura és $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$. Calculeu l'esperança i la variància de T .
- (c) Quina és la probabilitat que les dues transmissions del primer bit diferixin entre si, si sabem que la paraula s'ha recuperat? Compareu-ho amb la probabilitat a priori i comenteu si la variació és raonable.
- (d) Supposeu ara que rebem paraules de n bits i que la probabilitat d'error en un bit és $\frac{1}{2}$. Acceptem una paraula si hem rebut com a molt $\frac{n}{4}$ errors. La refusem si te almenys $\frac{3n}{4}$ errors. Altrament, la tornem a demanar. Raoneu quina és la probabilitat que acceptem la paraula si sabem que no l'hem tornat a demanar. Quan n és molt gran, aproximeu la probabilitat de tornar-la a demanar en funció de n i de $\text{erf}()$. A què tendirà aquesta probabilitat quan $n \rightarrow +\infty$? Justifiqueu-ho.

2. Un senyal electromagnètic es detecta en dos llocs diferents. En cada lloc hi ha un desfasament respecte el senyal original, donat per les variables aleatòries X i Y respectivament. La seva funció de densitat conjunta és:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2}(1 + \alpha \sin x \sin y), & \text{si } 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

on $\alpha \in [-1, 1]$, és un paràmetre real.

- (a) Trobeu les funcions de densitat marginal de les variables aleatòries X i Y . Quin tipus de variable són?
- (b) Calculeu l'esperança condicionada $E[Y|X = x]$. Dibuixeu la corresponent corba de regressió.
- (c) Calculeu el coeficient de correlació ρ entre X i Y . Quin és el màxim valor que pot prendre? Són X i Y incorrelades per algun valor de α ? En aquest cas: són independents?
- (d) Calculeu el coeficient de correlació ρ entre $U = X+Y$ i $V = X-Y$. Són U i V incorrelades? Són U i V independents?

SEGUEIX AL DARRERE

3. Sigui $X(t)$ el procés estocàstic

$$X(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 \leq t \leq Y \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on Y és una variable aleatòria exponencial de paràmetre $\lambda = 1$.

- (a) Quins són els possibles valors presos per cadascuna de les variables aleatòries $X(\frac{1}{2})$, $X(2)$ i $X(4)$. Determineu les seves funcions de probabilitat. Raoneu: es tracta d'un procés d'estat continu o d'estat discret?
- (b) Calculeu la funció de probabilitat de primer ordre del procés $X(t)$. Utilitzeu-la per obtenir-ne la funció de valor mitjà $m(t)$, així com la potència del procés. Compareu la forma de les realitzacions amb la del valor mitjà. Quines similituds i diferències hi ha?
- (c) Calculeu la funció d'autocorrelació de $X(t)$, $R(t_1, t_2)$. Verifiqueu a partir d'ella que la potència calculada a l'anterior apartat és correcta. (*Indicació: distingiu els casos $t_2 > t_1$ i $t_1 > t_2$.*)
- (d) Determineu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$, ($0 < t_1 < t_2$), i l'error quadràtic mínim d'aquesta estimació.