ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final **17 de gener de 2012**
Notes i al·legacions: provisionals 26/1, al·legacions 29/1, definitives 30/1. **Temps: 3h**

---

1 En una xarxa es transmeten paquets de dades en forma de blocs de tres paquets. Els diferents blocs són independents. En un bloc donat, el nombre de paquets que no arriben correctament és una variable aleatòria N amb funció de probabilitat $P(N=k) = \dfrac{4-k}{10}$ per $0 \leq k \leq 3$. Donat el nombre de paquets incorrectes, la seva localització és equiprobable (per exemple, si hi ha dos errors, la probabilitat que estiguin en el primer i el segon paquet és la mateixa que la que estiguin en el primer i tercer paquet, etc).

(a) En la transmissió d'un bloc anomenem F_i, $i = 1, 2, 3$, l'esdeveniment "el paquet i es transmet incorrectament". Calcula les probabilitats $P(F_1)$, $P(F_1 \cap F_2)$, $P(F_1|F_2)$. És independent la presència d'error en els diferents paquets d'un bloc?

Indicació: Es pot utilitzar la representació en diagrama de Venn de l'espai mostral i els esdeveniments F_i.

(b) Calcula la funció de probabilitat de la variable N sabent que el primer paquet arriba incorrectament.

(c) En la transmissió de 100 blocs, es considera el nombre C de blocs que tenen tots els paquets correctes. Troba la seva esperança i la seva desviació estàndard. Quins dels següents valors es poden considerar anòmals: $C=10$, $C=20$, $C=35$, $C=40$?

(d) Calcula el valor que tindria $P(F_1)$ si els errors en els paquets d'un bloc fossin independents i l'esperança de N valgués el mateix que en la situació original. Amb aquestes noves condicions, calcula els nous paràmetres de la variable C i mira si canvia la normalitat dels valors $C=10$, $C=20$, $C=35$, $C=40$.

2 Donada la variable aleatòria bidimensional (X, Y) amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}, & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$, es demana calcular:

(a) El valor de α i les funcions de densitat marginal de les variables aleatòries X i Y (dibuixa les seves gràfiques).

(b) La funció de densitat de la variable aleatòria Y condicionada a X, la seva esperança $E[Y|X]$ i, a partir d'aquesta, l'esperança de Y.

(c) Si $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ i $\Theta = \arctan(Y/X)$, troba la funció de densitat conjunta de (R, Θ) amb la seva regió $\mathcal{R}$ de validesa i comprova que $\int\int_{\mathcal{R}} f_{R\Theta}(r, \theta)\, dr d\theta = 1$.

(d) Utilitza el resultat anterior per demostrar que $P(X^2 + Y^2 \leq 1) \simeq 0{,}88$.

Ajuda: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \tan\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right).$

SEGUEIX AL DARRERA

3 Un senyal $Z(t)$ ve donat per un procés gaussià amb valor mitjà $m(t) = \alpha + \beta t$ i autocovariància $C(t_1, t_2) = 4e^{-|t_2 - t_1|}$.

(a) Calcula, justificant la resposta, els valors de les constants α i β que fan que $Z(t)$ sigui estacionari en sentit ampli amb potència igual a 40. Calcula el coeficient de correlació ρ entre les variables aleatòries $Z(0)$ i $Z(1)$. Depèn dels valors de α i β?

(b) Pel cas $\alpha = \beta = 0$: Troba la millor estimació lineal homogènia de $Z(t)$ donades $Z(t-T)$ i $Z(t+T)$, amb T constant positiva. Calcula l'error quadràtic mitjà d'aquesta estimació i comenta la seva gràfica en funció de T.

(c) Donat $X(t)$ procés de Poisson de paràmetre $\lambda = 2$ esdeveniments per unitat de temps, es considera el procés $Y(t) = X(t) - Z(t)$. Determina α i β per a que el procés $Y(t)$ tingui valor mitjà zero. Amb aquests valors i tenint en compte que $X(t)$ i $Z(t)$ són processos independents, calcula la potència del procés $Y(t)$ i troba a partir de quin instant és aquesta inferior al 1% de la potència de $X(t)$.