ETS d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'examen final **17 de gener de 2012**

---

1 En una xarxa es transmeten paquets de dades en forma de blocs de tres paquets. Els diferents blocs són independents. En un bloc donat, el nombre de paquets que no arriben correctament és una variable aleatòria N amb funció de probabilitat $P(N=k) = \dfrac{4-k}{10}$ per $0 \leq k \leq 3$. Donat el nombre de paquets incorrectes, la seva localització és equiprobable (per exemple, si hi ha dos errors, la probabilitat que estiguin en el primer i el segon paquet és la mateixa que la que estiguin en el primer i tercer paquet, etc).

(a) En la transmissió d'un bloc anomenem F_i, $i = 1, 2, 3$, l'esdeveniment "el paquet i es transmet incorrectament". Calcula les probabilitats $P(F_1)$, $P(F_1 \cap F_2)$, $P(F_1|F_2)$. És independent la presència d'error en els diferents paquets d'un bloc?
Indicació: Es pot utilitzar la representació en diagrama de Venn de l'espai mostral i els esdeveniments F_i.

(b) Calcula la funció de probabilitat de la variable N sabent que el primer paquet arriba incorrectament.

(c) En la transmissió de 100 blocs, es considera el nombre C de blocs que tenen tots els paquets correctes. Troba la seva esperança i la seva desviació estàndard. Quins dels següents valors es poden considerar anòmals: $C=10$, $C=20$, $C=35$, $C=40$?

(d) Calcula el valor que tindria $P(F_1)$ si els errors en els paquets d'un bloc fossin independents i l'esperança de N valgués el mateix que en la situació original. Amb aquestes noves condicions, calcula els nous paràmetres de la variable C i mira si canvia la normalitat dels valors $C=10$, $C=20$, $C=35$, $C=40$.

Solució:

(a) $P(N=0) = \dfrac{4}{10}, P(N=1) = \dfrac{3}{10}, P(N=2) = \dfrac{2}{10}, P(N=3) = \dfrac{1}{10}$.

$P(F_1\,|N=0) = 0$, $P(F_1\,|N=1) = \frac{1}{3}$, $P(F_1\,|N=2) = \dfrac{2}{3}$ (tres possibles parelles pels dos errors, en dues d'elles s'hi troba el primer paquet), $P(F_1\,|N=3) = 1$.

$$P(F_1) = \sum_{k=0}^{3} P(F_1\,|N=k)P(N=k) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{10} + 1\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{3}.$$

$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1 \cap F_2\,|N=2)P(N=2) + P(F_1 \cap F_2\,|N=3)P(N=3) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{10} + 1\cdot\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{6}$.

Com $P(F_2) = P(F_1) = \frac{1}{3}$, veiem que $P(F_1 \cap F_2) \neq P(F_1)P(F_2)$, així que els errors no es produeixen de manera independent.

$$P(F_1|F_2) = \frac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativament es pot fer tot amb el diagrama de la figura 1.)

(b) Per Bayes $P(N=k\,|F_1) = \dfrac{P(F_1|N=k)P(N=k)}{P(F_1)}$.

$P(N=0\,|F_1) = 0$,

$P(N=1\,|F_1) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{10}$,

$P(N=2\,|F_1) = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{10}$,

$P(N=3\,|F_1) = \dfrac{1\cdot\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{10}$.

(c) C és una variable binomial amb $n = 100$ i $p = P(N{=}0) = \frac{4}{10}$.

Llavors, $\overline{C} = np = 40$ i $\sigma_C = \sqrt{npq} = \sqrt{24} = 4{,}9$.

Els valors anòmals són $C{=}10$ (6 desviacions de distància de $\overline{C}$) i $C{=}20$ (4 desviacions de distància de $\overline{C}$). Els valors $C{=}35$ i $C{=}40$ es troben dins de una desviació i per tant són normals.

(d) Dins de la situació original $E[N] = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} k\frac{4-k}{10} = 1$.

En la nova situació, el nombre d'errors en un bloc és una variable binomial amb $n = 3$ i $p = P(F_1)$. igualant $1 = np$ trobem la probabilitat d'error per paquet $p = \dfrac{1}{3}$.

Ara C és una variable binomial amb $n = 100$ i $p = P(N{=}0) = (1-p)^3 = \frac{8}{27} = 0{,}296$.

Llavors, $\overline{C} = 29{,}6$ i $\sigma_C = 4{,}5$.

El valors $C{=}10$ segueix sent anòmal (4 desviacions). $C{=}20$ i $C{=}35$ són normals (2 i 1 desviacions). $C{=}40$ es troba a 2,3 desviacions i es pot considerar lleugerament anòmal.

2 Donada la variable aleatòria bidimensional (X, Y) amb funció de densitat conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}, & \text{si } 0 \le y \le x \le 1 \\ \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

amb $\alpha \in \mathbb{R}$, es demana calcular:

(a) El valor de α i les funcions de densitat marginal de les variables aleatòries X i Y (dibuixa les seves gràfiques).

(b) La funció de densitat de la variable aleatòria Y condicionada a X, la seva esperança $E[Y|X]$ i, a partir d'aquesta, l'esperança de Y.

(c) Si $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ i $\Theta = \arctan(Y/X)$, troba la funció de densitat conjunta de (R, Θ) amb la seva regió $\mathcal{R}$ de validesa i comprova que $\int\int_{\mathcal{R}} f_{R\Theta}(r,\theta)\, dr d\theta = 1$.

(d) Utilitza el resultat anterior per demostrar que $P(X^2 + Y^2 \le 1) \simeq 0{,}88$.

Ajuda: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right).$

Solució:

(a)

$$1 = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\alpha}{x} = \alpha \int_0^1 dx = \alpha$$

Per tant, $\alpha = 1$.

$$f_X(x) = \int_0^x dy \frac{1}{x} = 1, \qquad 0 < x < 1.$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 dx \frac{1}{x} = -\ln y, \qquad 0 < y < 1.$$

(Veure figura 2). Notem que X és uniforme en $[0, 1]$.

(b)

$$f(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x}, \qquad 0 < y < x.$$

Notem que Y condicionada a X és uniforme en $[0, X]$

$$E[Y|X] = \frac{0 + X}{2} = \frac{X}{2}$$

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = E\left[\frac{X}{2}\right] = \frac{1}{2}E[X] = \frac{1}{2} \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(c) Es tracta del canvi a coordenades polars: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = f_{XY}(r\cos\theta, r\sin\theta)r = \frac{1}{\cos\theta}$$

en la regió $\mathcal{R}$: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ (figura 3).

$$\int\int_{\mathcal{R}} f_{R\Theta}(r,\theta)\, dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} dr \frac{1}{\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan\theta|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

(d)

$$P(X^2 + Y^2 \le 1) = P(R \le 1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 dr \frac{1}{\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2}) = 0{,}8813.$$

3 Un senyal $Z(t)$ ve donat per un procés gaussià amb valor mitjà $m(t) = \alpha + \beta t$ i autocovariància $C(t_1, t_2) = 4e^{-|t_2 - t_1|}$.

(a) Calcula, justificant la resposta, els valors de les constants α i β que fan que $Z(t)$ sigui estacionari en sentit ampli amb potència igual a 40. Calcula el coeficient de correlació ρ entre les variables aleatòries $Z(0)$ i $Z(1)$. Depèn dels valors de α i β?

(b) Pel cas $\alpha = \beta = 0$: Troba la millor estimació lineal homogènia de $Z(t)$ donades $Z(t-T)$ i $Z(t+T)$, amb T constant positiva. Calcula l'error quadràtic mitjà d'aquesta estimació i comenta la seva gràfica en funció de T.

(c) Donat $X(t)$ procés de Poisson de paràmetre $\lambda = 2$ esdeveniments per unitat de temps, es considera el procés $Y(t) = X(t) - Z(t)$. Determina α i β per a que el procés $Y(t)$ tingui valor mitjà zero. Amb aquests valors i tenint en compte que $X(t)$ i $Z(t)$ són processos independents, calcula la potència del procés $Y(t)$ i troba a partir de quin instant és aquesta inferior al 1% de la potència de $X(t)$.

Solució:

(a) Per a ser estacionari en sentit ampli cal que $m(t) = \alpha + \beta t$ sigui constant, el que implica $\beta = 0$. $C(t_1, t_2)$ (per tant $R(t_1, t_2)$) ja depèn només de la diferència de temps. La potència és $R(t,t) = C(t,t) + m(t)^2 = 4 + \alpha^2$. Igualant-la a 40 trobem les solucions $\alpha = 6$ i $\alpha = -6$. Tenint en compte que la covariància entre $X(t_1)$ i $X(t_2)$ val $C(t_1, t_2)$ i la variància de $X(t)$ val $C(t,t)$:

$$\rho = \frac{C[X(0), X(1)]}{\sigma_{X(0)}\sigma_{X(1)}} = \frac{C(0,1)}{\sqrt{C(0,0)}\sqrt{C(1,1)}} = \frac{4e^{-1}}{\sqrt{4}\sqrt{4}} = e^{-1}.$$

independent dels valors de α i β.

(b) L'estimador és $\widehat{Z(t)} = aZ(t-T) + bZ(t+T)$. Les equacions del principi d'ortogonalitat són:

$$\begin{cases} E[(aZ(t-T) + bZ(t+T))Z(t-T)] = E[Z(t)Z(t-T)] \\ E[(aZ(t-T) + bZ(t+T))Z(t+T)] = E[Z(t)Z(t+T)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} aR(t-T, t-T) + bR(t+T, t-T) = R(t, t-T) \\ aR(t-T, t+T) + bR(t+T, t+T) = R(t, t+T) \end{cases}$$

Utilitzant $R(t_1, t_2) = 4e^{-|t_2 - t_1|}$ (ja que $m(t) = 0$) i dividint per 4 les dues equacions:

$$\begin{cases} a + be^{-2T} = e^{-T} \\ ae^{-2T} + b = e^{-T} \end{cases}$$

Restant les dues equacions trobem $a = b$ i, aïllant en una d'elles, $a = b = \dfrac{e^{-T}}{1 + e^{-2T}}$.

L'error quadràtic mitjà val

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= E[(Z(t) - aZ(t-T) + bZ(t+T))Z(t)] = R(t,t) - aR(t-T, t) - bR(t+T, t) \\ &= 4\left(1 - 2e^{-T}\frac{e^{-T}}{1 + e^{-2T}}\right) = 4\frac{1 - e^{-2T}}{1 + e^{-2T}} \end{aligned}$$

Per la gràfica és suficient tenir en compte $\lim_{T \to 0} \bar{\epsilon} = 0$ i $\lim_{T \to \infty} \bar{\epsilon} = 4$. Per tant, l'error disminueix a mesura que prenem les dades més properes a l'instant t i, lògicament, s'anul·la quan $T = 0$ (figura 4).

(c) Pel procés de Poisson, $m_X(t) = 2t$ i $\mathrm{Pot}_X(t) = R_X(t,t) = 2t + 4t^2$. Ara imposem

$$0 = m_Y(t) = E[X(t)] - E[Z(t)] = 2t - \alpha - \beta t$$

d'on $\alpha = 0$ i $\beta = 2$.

Així, $m_Z(t) = 2t$ i $\mathrm{Pot}_Z(t) = C_Z(t,t) + m(t)^2 = 4 + 4t^2$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_Y(t) &= E[(X(t) - Z(t))^2] = E[X(t)^2] + E[Z(t)^2] - 2E[X(t)]E[Z(t)] \\ &= (2t + 4t^2) + (4 + 4t^2) - 2 \cdot 2t \cdot 2t = 4 + 2t. \end{aligned}$$

L'instant a partir del qual $\mathrm{Pot}_Y(t) < 0{,}01\mathrm{Pot}_X(t)$ és la solució positiva de l'equació $4 + 2t = \frac{1}{100}(2t + 4t^2)$, $t = 51{,}4$.

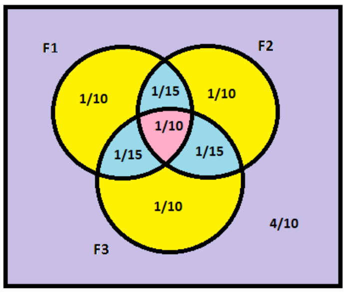

Figura 1: Apartat 1(a).

Figura 2: Apartat 2(b).

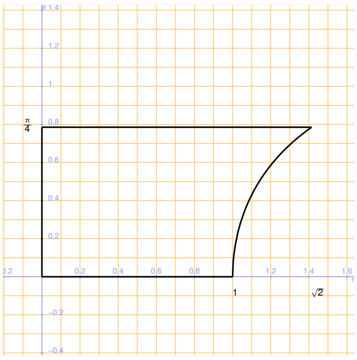

Figura 3: Apartat 2(c).

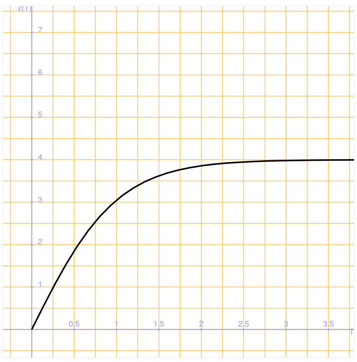

Figura 4: Apartat 3(b).