

## PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final

21 de juny de 2011

Notes i al·legacions: Atenea

Temps: 3h

- 1** Les dades provinents de mesures astronòmiques arriben seqüencialment a un centre terrestre a través de tres satèl·lits que participen simultàniament en l'emissió de cada dada. Cada satèl·lit, de forma independents dels altres, pot fallar en la transmissió amb probabilitat  $\frac{1}{2}$ . A partir del senyal dels tres satèl·lits cada dada es reconstrueix amb una qualitat que pot ser alta o baixa. Si han fallat  $N$  satèl·lits, la probabilitat de tenir la dada amb qualitat alta val  $\frac{1}{2N+2}$ . El temps necessari (en mil·lisegons) per reconstruir la dada és una variable exponencial de paràmetre  $\lambda = \frac{4-N}{10}$ .
- (a) En 80 dades independents, què valen el nombre mitjà i la desviació del nombre de dades reconstruïdes amb alta qualitat? Quina és la probabilitat de tenir més de 25 dades en alta qualitat?
- (b) S'ha rebut una dada en alta qualitat. Quina és la probabilitat que hagin fallat exactament dos satèl·lits? Comenteu el canvi que hi ha hagut respecte la probabilitat a priori.
- (c) Què val el temps mitjà per reconstruir una dada? Podem reconstruir-les a temps real si arriben 230 dades per segon?
- 2** A un punt d'una xarxa arriben missatges formats per dos blocs de mides  $X$  i  $Y$  (Mb). La densitat de la variable bidimensional  $(X, Y)$  és

$$f(x, y) = \begin{cases} K(1 - xy), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ i } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

on  $K$  és una constant.

- (a) Calculeu el valor de  $K$ . Trobeu les densitats marginals de  $X$  i de  $Y$ . Calculeu el coeficient de correlació  $\rho$  entre  $X$  i  $Y$ . Són independents  $X$  i  $Y$ ?
- (b) Calculeu l'esperança de  $X$  condicionada a  $Y = y$ . Quina és la millor estimació possible del valor de  $X$  si sabem que  $Y = 1$ ?
- (c) La mida del missatge és  $Z = X + Y$ . Calculeu la seva esperança i variància. Trobeu la probabilitat que  $Z > 1$ .

(Indicació:  $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$ .)

- 3** El soroll en un canal de comunicació ve donat pel procés

$$X(t) = A \cos t + B \sin t + C,$$

on  $A, B, C$  són variables aleatòries gaussianes incorrelades, d'esperances  $m_A = m_B = 0$ ,  $m_C = 1$  i desviacions  $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$

- (a) Calculeu les funcions de valor mitjà, d'autocorrelació, d'autocovariància i la potència del procés  $X(t)$ . És estacionari en sentit ampli?
- (b) Trobeu la millor estimació de  $X(\pi)$  per una constant. Calculeu l'error mitjà associat a aquesta estimació.
- (c) Trobeu la millor estimació lineal homogènia de  $X(\pi)$  donades  $X(0)$  i  $X(\frac{\pi}{2})$ . Compareu l'error mitjà d'aquesta estimació amb el de l'anterior apartat. Quina estimació és millor? Com es podria millorar l'estimació lineal anterior si només disposem d'aquestes dues dades?