

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Examen final

24 de gener de 2011

Notes i alegacions: Atenea

Temps: 3h

- 1 Un sistema transmet missatges independents, cadascun dels quals va acompanyat d'una paraula de 8 bits que permet descodificar-lo. En la transmissió, cada bit de la paraula, de manera independent dels altres, pot arribar canviat amb probabilitat 0,2. Si el nombre N de bits canviats és menor o igual que 2, el missatge es pot descodificar amb seguretat. Si N val 3 o 4, el missatge es pot descodificar amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Si N val 5 o més, el missatge no es pot descodificar.
- Quina és la probabilitat que un missatge es pugui descodificar? Quin percentatge dels missatges que es descodifiquen tenen la paraula sense cap error? Un missatge és irrecuperable només si $N \geq 5$. Quina és la probabilitat que un missatge que no s'ha pogut descodificar es pugui recuperar?
 - Sigui T el nombre de missatges transmesos fins que un no es pot descodificar. Doneu la seva funció de probabilitat i el seu valor mitjà.
 - La paraula d'un missatge ha arribat amb 3 bits canviats. Quina és la probabilitat que els 2 primers bits siguin correctes?

- 2 Els instants en que s'inicia i finalitza el processat d'un senyal de comunicació venen donats per les variables aleatòries X i Y , respectivament. La densitat de la variable bidimensional (X, Y) és

$$f(x, y) = \begin{cases} Ke^{-(x+y)}, & \text{si } 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

on K és una constant.

- Calculeu el valor de K , així com la densitat de Y condicionada a $X = x$. Dibuixeu aquesta densitat. Si sabem que $X = 1$, quina és la millor estimació en mitjana quadràtica del valor de Y ?
- El temps de processat ve donat per la variable $Z = Y - X$. Trobeu la seva densitat així com la seva esperança i variància.
- Calculeu la probabilitat P_t que en l'instant t ($t > 0$) s'estigui processant el missatge. Representeu P_t en funció de t gràficament, indicant el seu valor màxim i l'instant en que aquest es dona.

(Indicació: $\int_a^\infty e^{-z} dz = e^{-a}$, $\int_a^\infty ze^{-z} dz = (a+1)e^{-a}$.)

- 3 L'arribada de missatges a un servidor de correu ve donada per un procés de poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 2$ missatges per segon.

- Calculeu la probabilitat que durant els 2 primers segons no arribi cap missatge. Calculeu la probabilitat que durant el primer segon n'arribin 4 o més. Calculeu el valor mitjà i la desviació típica del nombre de missatges que arriben durant els 10 primers segons. Si durant els primers 10 segons arriben 35 missatges, podem sospitar que hi ha alguna anomalia?
- Trobeu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t)$ donada $X(t - T)$ on T és una constant positiva. Interpreteu el resultat.
- Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació. Representeu-lo gràficament en funció de T . Interpreteu el seu comportament.

(Indicació: Observeu que es pot escriure $R(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)(1 + \lambda \max(t_1, t_2))$.)