

PROBABILITAT, PROCESSOS ESTOCÀSTICS I ESTADÍSTICA

Solució de l'examen final

24 de gener de 2011

1 Un sistema transmet missatges independents, cadascun dels quals va acompanyat d'una paraula de 8 bits que permet descodificar-lo. En la transmissió, cada bit de la paraula, de manera independent dels altres, pot arribar canviat amb probabilitat 0,2. Si el nombre N de bits canviats és menor o igual que 2, el missatge es pot descodificar amb seguretat. Si N val 3 o 4, el missatge es pot descodificar amb probabilitat $\frac{1}{2}$. Si N val 5 o més, el missatge no es pot descodificar.

- (a) Quina és la probabilitat que un missatge es pugui descodificar? Quin percentatge dels missatges que es descodifiquen tenen la paraula sense cap error? Un missatge és irrecuperable només si $N \geq 5$. Quina és la probabilitat que un missatge que no s'ha pogut descodificar es pugui recuperar?
- (b) Sigui T el nombre de missatges transmesos fins que un no es pot descodificar. Doneu la seva funció de probabilitat i el seu valor mitjà.
- (c) La paraula d'un missatge ha arribat amb 3 bits canviats. Quina és la probabilitat que els 2 primers bits siguin correctes?

Solució:

- (a) N és binomial amb $n = 8$, $p = 0,2$. $P(N=k) = \binom{8}{k}0,2^k0,8^{8-k}$.
 $P(N=0) = 0,16777$, $P(N=1) = 0,33554$, $P(N=2) = 0,29360$, $P(N=3) = 0,14680$,
 $P(N=4) = 0,04587$, $P(N \geq 5) = 0,01040$.

Si $D =$ "el missatge es pot descodificar":

$$P(D) = P(N=0) + P(N=1) + P(N=2) + \frac{1}{2}(P(N=3) + P(N=4)) = 0,89325.$$

$$P(N=0|D) = \frac{P(D|N=0)P(N=0)}{P(D)} = \frac{1 \cdot 0,16777}{0,89325} = 0,1878. \text{ Així, un } 18,8\% \text{ dels missatges descodificats tenen la paraula correcta.}$$

$$P(N=3 \text{ o } 4|\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}|N=3 \text{ o } 4)P(N=3 \text{ o } 4)}{P(\bar{D})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,19267}{1 - 0,89325} = 0,9025. \text{ És la probabilitat de poder recuperar un missatge que no s'ha descodificat.}$$

- (b) T és una variable geomètrica amb $p = P(\bar{D}) = 0,1067$.

$$P_T(k) = 0,1067 \cdot 0,89325^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad E[T] = \frac{1}{p} = 9,4.$$

- (c) Els casos possibles són les maneres de situar els 3 errors en els 8 bits. Els casos favorables són les maneres de situar els 3 errors en els últims 6 bits.

$$P = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{14} = 0,3571.$$

- 2 Els instants en que s'inicia i finalitza el processat d'un senyal de comunicació venen donats per les variables aleatòries X i Y , respectivament. La densitat de la variable bidimensional (X, Y) és

$$f(x, y) = \begin{cases} Ke^{-(x+y)}, & \text{si } 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

on K és una constant.

- (a) Calculeu el valor de K , així com la densitat de Y condicionada a $X = x$. Dibuixeu aquesta densitat. Si sabem que $X = 1$, quina és la millor estimació en mitjana quadràtica del valor de Y ?
- (b) El temps de processat ve donat per la variable $Z = Y - X$. Trobeu la seva densitat així com la seva esperança i variància.
- (c) Calculeu la probabilitat P_t que en l'instant t ($t > 0$) s'estigui processant el missatge. Representeu P_t en funció de t gràficament, indicant el seu valor màxim i l'instant en que aquest es dona.

(Indicació: $\int_a^\infty e^{-z} dz = e^{-a}$, $\int_a^\infty ze^{-z} dz = (a+1)e^{-a}$.)

Solució:

(a) $1 = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty Ke^{-x}e^{-y} dy \right) dx = K \int_0^\infty e^{-2x} dx = \frac{K}{2}$. Així, $K = 2$.

Densitat marginal de X : $f(x) = \int_x^\infty 2e^{-x}e^{-y} dy = 2e^{-2x}$, per $x > 0$.

Densitat de Y condicionada a $X = x$: $f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-2x}} = e^{-(y-x)}$, per $y > x$.

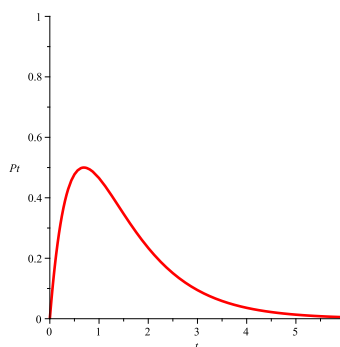
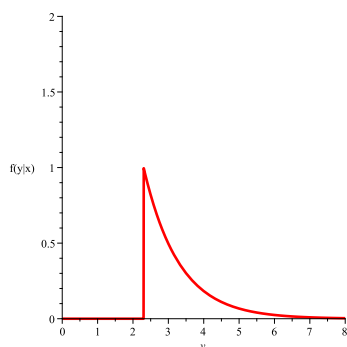
La millor estimació és la no lineal, $c(X) = E[Y|X]$:

$E[Y|x] = \int_x^\infty ye^{-(y-x)} dy = e^x \int_x^\infty ye^{-y} dy = x + 1$. Si $X = 1$ la millor estimació de Y és el valor 2.

(b) $F_Z(z) = P(Y - X \leq z) = 1 - P(Y > X + z) = 1 - \int_0^\infty \left(\int_{x+z}^\infty 2e^{-x}e^{-y} dy \right) dx = 1 - e^{-z}$.
 $f_Z(z) = e^{-z}$, per $z > 0$. Així, Z és exponencial de paràmetre $\lambda = 1$. La seva esperança i la seva variància valen 1.

(c) $P_t = P(X < t \text{ i } Y > t) = \int_0^t \left(\int_t^\infty 2e^{-x}e^{-y} dy \right) dx = 2(e^{-t} - e^{-2t})$.

Derivant i igualant a zero trobem el màxim en $t = \ln 2$ on $P_t = \frac{1}{2}$.



3 L'arribada de missatges a un servidor de correu ve donada per un procés de poisson $X(t)$ de paràmetre $\lambda = 2$ missatges per segon.

- (a) Calculeu la probabilitat que durant els 2 primers segons no arribi cap missatge. Calculeu la probabilitat que durant el primer segon n'arribin 4 o més. Calculeu el valor mitjà i la desviació típica del nombre de missatges que arriben durant els 10 primers segons. Si durant els primers 10 segons arriben 35 missatges, podem sospitar que hi ha alguna anomalia?
- (b) Trobeu la millor estimació lineal no homogènia de $X(t)$ donada $X(t - T)$ on T és una constant positiva. Interpreteu el resultat.
- (c) Calculeu l'error quadràtic mitjà de l'anterior estimació. Representeu-lo gràficament en funció de T . Interpreteu el seu comportament.

(Indicació: Observeu que es pot escriure $R(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)(1 + \lambda \max(t_1, t_2))$.)

Solució:

- (a) Fixat t , $X(t)$ és una variable de Poisson amb paràmetre $\alpha = 2t$.

$$P(X(2) = 0) = e^{-4} = 0,0183.$$

$$P(X(1) \geq 4) = 1 - P(X(1) \leq 3) = 1 - e^{-2}(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}) = 0,1428.$$

$E[X(10)] = 20$, $V[X(10)] = 20$, d'on $\sigma = 4,47$. Un valor de 35 difereix del valor mitjà 20 en més de 3 vegades la desviació. Per tant, hem de sospitar que hi ha alguna anomalia.

- (b) Estimem $X(t)$ amb l'estimador $C = aX(t-T) + b$. Les equacions del principi d'ortogonalitat són:

$$\begin{cases} E[(aX(t-T) + b)X(t-T)] = E[X(t)X(t-T)] \\ E[(aX(t-T) + b) \cdot 1] = E[X(t) \cdot 1]. \end{cases}$$

És a dir:

$$\begin{cases} aR(t-T, t-T) + bm(t-T) = R(t, t-T) \\ am(t-T) + b = m(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a2(t-T)(1 + 2(t-T)) + b2(t-T) = 2(t-T)(1 + 2t) \\ a2(t-T) + b = 2t. \end{cases}$$

Simplificant la primera per $2(t-T)$ i restant-li la segona, trobem $a = 1$ i després $b = 2T$.

La millor estimació és $C = X(t-T) + 2T$. Així, l'obtenim sumant-li al valor conegut $X(t-T)$ el nombre mitjà de missatges arribats entre els instants $t-T$ i t .

- (c) $\bar{\epsilon} = E[(X(t) - C)^2] = E[X(t)(X(t) - X(t-T) - 2T)] = R(t, t) - R(t, t-T) - 2Tm(t) = 2t(1 + 2t) - 2(t-T)(1 + 2t) - 2T2t = 2T$. L'error va augmentant a mesura que el punt a estimar es fa més llunyà.

