Preguntas Test + Problemas
Fonaments d'Àlgebra

M.A. Fiol
ETSE de Telecomunicació
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: fiol@mat.upc.es

1 Geometría del Plano y del Espacio

1.1 Preguntas Test

1. Si los vectores u, v, w corresponden a los vértices de un triángulo equilátero con baricentro (punto donde se cortan las medianas) en el origen, entonces se cumple:

(a) $u = v + w$
(b) $u + v + w = 0$
(c) $u = v - w$
(d) $u - v + w = 0$

2. La recta $Ax + By + C = 0$, que es mediatriz del segmento con extremos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, satisface:

(a) $\frac{A}{B} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$
(b) $A^2 + B^2 = 0$
(c) ninguna de las otras
(d) $\frac{A}{B} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

3. La distancia desde un punto de la recta $Ax + By + C = 0$ al origen alcanza su mínimo cuando

(a) $x = C$
(b) $x = -AC$
(c) $x = \frac{-AC}{A^2+B^2}$
(d) $x = \frac{AC}{\sqrt{A^2-B^2}}$

4. El producto escalar de los vectores $r_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $r_2(\cos\beta, -\sin\beta)$ es:

(a) $r_1 r_2 \sin(\alpha - \beta)$
(b) $r_1 r_2(\cos\alpha + \cos\beta)$
(c) $(r_1 + r_2)\cos(\alpha - \beta)$
(d) $r_1 r_2 \cos(\alpha + \beta)$

5. Un vector perpendicular a la recta $Ax+By+C = 0$ es:

(a) (B^{-1}, A^{-1})
(b) (A, B)
(c) $(-B, A)$
(d) $(A^{-1}, -B^{-1})$

6. En el espacio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?:

(a) Dos planos distintos siempre determinan una recta.
(b) Toda recta se puede representar como la intersección de dos planos, uno que pasa por el origen y otro que no corta al eje OZ.
(c) Toda recta se puede representar como la intersección de dos planos, uno paralelo al plano XY y otro que no corta al eje OZ.
(d) La recta
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$
con $a, b, c \neq 0$, se puede representar como la intersección de dos planos, uno que no corta al eje OY y otro que no corta al eje OZ.

7. El área del paralelogramo determinado por los vectores u, v es igual a la expresión:

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 + \langle u, v\rangle^2}$

(b)

$$\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

(c) $\|u\|\|v\|$

(d) ninguna de las otras

8. Los lados y diagonales, $\|u\|$, $\|v\|$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$, del paralelogramo definido por los vectores u, v satisfacen :

(a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(b) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(c) $\|u+v\| + \|u-v\| = \|u\| + \|v\|$

(d) $\|u+v\| + \|u-v\| = 2\|u\| + 2\|v\|$

9. Los cuatro puntos del espacio que corresponden a los vectores u, v, w, z están sobre un mismo plano cuando:

(a) z es combinación lineal de u, v, w.

(b) $u-z$ es combinación lineal de $v-z, w-z$.

(c) u, v, w, z son linealmente independientes.

(d) Los **seis** pares de puntos $\{u,v\}$, $\{u,w\}$, $\{u,z\}$, $\{v,w\}$, $\{v,z\}$ y $\{w,z\}$ determinan sólo **tres** rectas distintas.

10. El plano que es perpendicular al vector $(1,1,1)$ y dista 1 del origen tiene como ecuación

(a) $x+y+z=1$

(b) $(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) + \lambda(1,1,-2) + \mu(1,-2,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(c) $x+y+z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(d) $(x,y,z) = \lambda(1,1,-2) + \mu(1,-2,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

11. Para determinar cuál es el plano $Ax+By+Cz+D=0$ que pasa por tres puntos dados (x_i, y_i, z_i), $i=1,2,3$, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1A + y_1B + z_1C + D &= 0 \\ x_2A + y_2B + z_2C + D &= 0 \\ x_3A + y_3B + z_3C + D &= 0 \end{aligned}$$

con **cuatro** incógnitas (es decir, A, B, C, D), pero sólo **tres** ecuaciones. Esto se debe a que:

(a) Para determinar el plano nos falta otra ecuación.

(b) El sistema puede tener infinitas soluciones.

(c) Una incógnita depende de las otras.

(d) Existen infinitos planos que satisfacen la condición.

12. Un vector ortogonal al plano que contiene a las dos rectas $(x,y,z) = \lambda(1,2,3)$ y $(x,y,z) = \mu(-3,2,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es:

(a) $(-2,1,0)$

(b) $(0,1,2)$

(c) $(7,1,-3)$

(d) $(2,5,-4)$

1.2 Soluciones Test

1(b): Por ejemplo, si $u=(1,0)$, entonces $v = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $w = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$;
2(a): La ecuación de dicha recta es

$$2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0;$$

3(c): Dicha distancia es

$$d = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

4(d);
5(a): Un vector director de esta recta es (c);
6(d);
7(b);
8(b): Esta es la llamada **Ley del Paralelogramo**;
9(b);
10(b): La **ecuación explíta de** la recta es

$$x+y+z=\sqrt{3};$$

11(b): Una variable dada (no nula) puede tomar cualquier valor;
12(d);

1.3 Soluciones Problemas

8. $(-8,-1)$

9. $a=3$ (Entonces las tres rectas pasan por el punto $(2,3)$).

11. Si α y β son los ángulos que forman ambas rectas con el eje OX, entonces $m_1 = \tan\alpha$, $m_2 = \tan\beta$, y $\tan\phi = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \cdots$ (usar las fórmulas trigonométricas correspondientes)

2 Formalismo Matemático

2.1 Preguntas Test

1. Si p, q denoten dues proposicions tals que $(p \to q) \wedge p$, aleshores es compleix

(a) $\neg p$
(b) $\neg q$
(c) cap de les altres
(d) q

2. Si p, q denoten dues proposicions tals que $(p \to q) \wedge \neg q$ pren el valor cert, aleshores es compleix:

(a) $\neg p$ és certa
(b) p és certa
(c) cap de les altres
(d) $\neg q$ és falsa

3. Consideremos las dos siguientes proposiciones: A:=$\{$*Las tres rectas del plano* $A_i x + B_i y + C = 0$, $i = 1, 2, 3$, *son concurrentes (es decir, se cortan en un punto)*$\}$;
B:=$\{$*Los tres vectores del espacio* (A_i, B_i, C_i), $i = 1, 2, 3$, *son coplanares (es decir, están en un mismo plano*$\}$.
Entonces,

(a) $A \Rightarrow B$
(b) $A \Leftarrow B$
(c) $A \iff B$
(d) ninguna de las otras

4. Per reducció al absurd, hom pot demostrar que si $14x + 22y = 33$, aleshores

(a) x ó y són múltiples de 3.
(b) x i y no son enters
(c) x ó y no son enters
(d) x i y son enters

5. Un nombre *perfecte* n és un nombre natural que és igual a la suma dels seus divisors $< n$ (per exemple, 6 és perfecte perquè $1 + 2 + 3 = 6$). Aleshores, per reducció a l'absurd es pot demostrar que:

(a) si $n > 6$, aleshores n es primer.
(b) cap de les altres.
(c) $n \leq 6$
(d) n no es primer.

6. La suma de los cien primeros cuadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$ es

(a) 338350
(b) 500500
(c) 340300
(d) 350350

7. La suma dels cent primers nombres quadrats $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$ és:

(a) 338350
(b) 500500
(c) 340300
(d) 350350

8. Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, y $a_k = a_{k-1} + 8$ $(k \geq 3)$. Entonces, la suma de los n primeros términos es:

(a) $(2n + 1)^2$
(b) $(2n - 1)^2$
(c) $n(4n - 4)$
(d) $n(4n + 4)$

9. Una successió $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfà $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, i $a_k = a_{k-1} + 8$ $(k \geq 3)$. Aleshores, la suma dels n primers termes és:

(a) $(2n + 1)^2$
(b) $(2n - 1)^2$
(c) $n(4n - 4)$
(d) $n(4n + 4)$

10. Si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, la suma de la progresión geométrica $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cdots + \cos^{2n} x$, cuando n es muy grande, es aproximadamente

(a) $\frac{1}{\cos x}$
(b) $\frac{1}{\sin^2 x}$
(c) $\frac{1}{\sin x}$
(d) $\frac{1}{\cos^2 x}$

11. Si $x \in (0, \pi/2)$, la suma de la progressió geomètrica $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cdots + \cos^{2n} x$, quan n és molt gran, és aproximadament:

(a) $\dfrac{1}{\cos x}$

(b) $\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(c) $\dfrac{1}{\sin x}$

(d) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

12. La suma de los n primeros números naturales $S_n := 1+2+3+\cdots+n$ se puede escribir como el número combinatorio $S_n = \binom{n+1}{2}$. Esto se debe a que:

(a) Ninguna razón en particular. Es una casualidad.

(b) S_n es la suma de una progresión aritmética.

(c) Las parejas de elementos de un conjunto con $n+1$ elementos pueden listarse de forma natural en grupos de $1, 2, 3, \ldots, n$ parejas.

(d) El conjunto de parejas de elementos (2-subconjuntos) de un conjunto con $n+1$ elementos admite una partición en subconjuntos de $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elementos.

13. La suma dels n primers nombres naturals $S_n := 1+2+3+\cdots+n$ es pot escriure com el nombre combinatori $S_n = \binom{n+1}{2}$. Això es degut a que:

(a) Cap raó en particular. És fruit de la casualitat.

(b) S_n es la suma d'una progressió aritmètica.

(c) Les parelles d'elements d'un conjunt amb $n+1$ elements es poden llistar de forma natural en grups de $1, 2, 3, \ldots, n$ parelles.

(d) El conjunt de parelles d'elements (2-subconjunts) d'un conjunt amb $n+1$ elements admet una partició en subconjunts de $0, 1, 2, \ldots, n-1$ elements.

2.2 Soluciones Test

1(d); **2**(a); **3**(?); **4**(c); **5**(c); **6**(a); **8**(b); **10**(b); **12**(c);

2.3 Soluciones Problemas

1. Las dos proposiciones son equivalentes.

4. (a) Si n, m son números impares, entonces $p = n^2 + m^3$ es un número par;
(b) **Hipótesis:** "n y m son números impares"; **Tésis:** "$n^2 + m^3$ es un número par";
(c) $\cdots$;
(d) $(2k+1)^2 + (2l+1)^3 = \cdots$
(e) Si n, m son dos números tales que $n^2 + m^3$ es impar, entonces n ó m es par.

6. (b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, existen dos números primos p, q tales que $2k = p + q$.

7.
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1}(1+2+3+4+\cdots+n).$$
Por ejemplo, *si n es impar, la suma alternada de los cuadrados de los n primeros números naturales es igual a la suma de dichos números.*

8. Si c, v, a representan el número de caras, vértices y arístas, respectivamente, de un poliedro (no necesariamente regular), entonces se cumple la llamada **fórmula de Euler**:
$$c + v = a + 2.$$
(Se puede demostrar por inducción sobre v).

9. En general, se cumple:
$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+4+\cdots+n)^2.$$
(Se puede demostrar por inducción usando el resultado del problema 13).

10. Si α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, representan dichos ángulos, entonces
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2) \cdot 180^{\text{o}}.$$

12.
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$
Ver Figura 1 para una "demostración visual". Ver Problema 16 para una demostración por inducción.

13.
$$\frac{(n+1)n}{2} = \binom{n}{2}.$$

14.
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

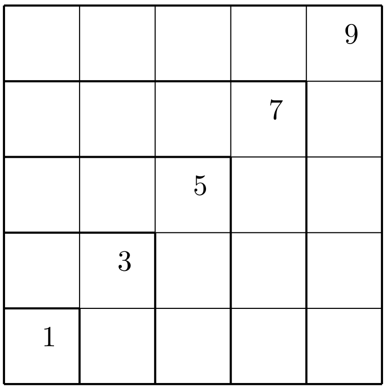

Figure 1: $1+3+5+7+9=5^2$

15. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \mid n(n+2)+1=m^2$. En efecto, $n(n+2)+1=n^2+2n+1=m^2$ con $m=n+1$.

16. $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n := \sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$
Inducción:
(i) $S_1=1$;
(ii) Supongamos que $S_{n-1}=(n-1)^2$. Entonces, $S_n=S_{n-1}+(2n-1)=(n-1)^2+2n-1=n^2$.

17. Para todo número natural $n \geq 0$, la suma de las $n+1$ primeras potencias de 2, $S_n := 2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n$, es igual a la potencia $(n+1)$-ésima de 2 menos 1.
Inducción:
(i) $S_1=2^0=2^1-1=1$;
(ii) Supongamos que $S_{n-1}=2^n-1$. Entonces, $S_n=S_{n-1}+2^n=2^n-1+2^n=2^{n+1}-1$.

18. Sea L_n el número de diagonales de un polígono (convexo) de $n(\geq 3)$ lados. Probemos que $L_n=n(n-3)/2$.
Inducción:
(i) $S_3=0$;
(ii) Supongamos que $S_{n-1}=(n-1)(n-4)/3$. Entonces,
$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1}+1+(n-3) \\ &= \frac{(n-1)(n-4)}{2}+n-2 \\ &= \frac{n(n-3)}{2}. \end{aligned}$$

19. (a) cierta; (b) cierta; (c) falsa.

20. Consideremos los siguientes sistemas:
    (i) El sistema
    $$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$
    cumple S y R $(x=1, y=0)$.
    (ii) El sistema
    $$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \end{aligned}$$
    cumple S pero no R (no compatible).
    (iii) El sistema
    $$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$
    no cumple S pero si R $(x=1, y=0)$.
    (iv) El sistema
    $$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 2 \\ x+y &= 3 \end{aligned}$$
    no cumple ni S ni R (no compatible). En consecuencia, no hay ninguna implicación entre ambas proposiciones.

21. Como la fórmula para el trabajo realizado por una fuerza F en un desplazamiento L es $T=F\cdot L$, tenemos que $S(L=0) \Rightarrow R(T=0)$ (S es suficiente para que se cumpla R).

22. La condición es suficiente, pero no necesaria. (Un número entero es divisible por 5 si y sólo si "acaba" en 0 ó 5).

23. (a) cierta y vale el recíproco; (b) cierta pero no vale el recíproco; (c) cierta pero no vale el recíproco ($x=-5$ también cumple la ecuación de segundo grado); (d) cierta y vale el recíproco; (e) cierta y vale el recíproco; (f) cierta pero no vale el recíproco ($\tan 225^{\circ}=1$); (g) cierta y vale el recíproco; (h) cierta pero no vale el recíproco; (g) cierta pero no vale el recíproco.

24. (a) $\Rightarrow$;
(b) sin implicaciones;
(c) $\Longleftrightarrow$;
(d) $\Rightarrow$.

3 Conjuntos y Aplicaciones. Combinatoria.

3.1 Preguntas Test

1. Siguin A, B dos conjunts. De la igualtat $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, es por deduir que

(a) $A \neq B$
(b) $A \subset B$
(c) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$
(d) $A = (A \cup B) \cup (A \cup \overline{B})$

2. Si $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ denoten conjunts, aleshores podem afirmar que es satisfà l'igualtat $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$

(a) sempre
(b) mai
(c) sempre que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
(d) cap de les altres

3. Si A, B, C son tres conjunts que satisfan $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C|$, aleshores es por afirmar que

(a) $A \cap B = \emptyset$
(b) $A \cap B \cap C \neq \emptyset$
(c) cap de les altres
(d) $A \cup B \cup C \subset A \cap B \cap C$

4. Tres conjuntos A, B, C satisfacen $A \cup B \subset \overline{C}$. Entonces se puede afirmar que:

(a) $\overline{C} \subset \overline{A \cup B}$
(b) $C \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
(c) $\overline{C} \neq A \cap B$
(d) $C \subset A \cap B$

5. Tres conjunts A, B, C satisfan $A \cup B \subset \overline{C}$. Aleshores, es pot afirmar que:

(a) $\overline{C} \subset \overline{A \cup B}$
(b) $C \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
(c) $\overline{C} \neq A \cap B$
(d) $C \subset A \cap B$

6. El dominio de la función $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{4-x^2}$ es

(a) $-1 \leq x \leq 1$, $|x| \neq 2$
(b) $x \geq 1$, $x \leq -1$, $x \neq \pm 2$
(c) $|x| > 1$, $x \neq \pm 2$
(d) $|x| < 1$, $|x| \neq 2$

7. El domini de la funció $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{4-x^2}$ és:

(a) $-1 \leq x \leq 1$, $|x| \neq 2$
(b) $x \geq 1$, $x \leq -1$, $x \neq \pm 2$
(c) $|x| > 1$, $x \neq \pm 2$
(d) $|x| < 1$, $|x| \neq 2$

8. El domini de la funció $f(x) = \ln(\ln(\sin^2 x))$ és

(a) $x \leq 1$
(b) $|x| \leq 1$
(c) $\mathbb{R}^+$
(d) $\emptyset$

9. Una función del tipo $f(x) = \frac{\alpha x}{x+\beta}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cumple $f^{-1} = f$. Entonces se cumple que:

(a) $\alpha = \beta$
(b) $\alpha = \beta + 1$
(c) $\alpha = \beta - 1$
(d) $\alpha = -\beta$

10. Una funció del tipus $f(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$, amb $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, compleix $f^{-1} = f$ (és a dir, coincideix amb la seva inversa). Aleshores resulta que:

(a) $\alpha = \beta$
(b) $\alpha = \beta + 1$
(c) $\alpha = \beta - 1$
(d) $\alpha = -\beta$

11. El número de posibles aplicaciones $f : A \to B$ de un conjunto A con n elementos a un conjunto B con m elementos es:

(a) $\binom{n}{m}$
(b) $n \cdot m$
(c) n^m
(d) m^n

12. El nombre de possibles aplicacions $f : A \to B$ d'un conjunt A amb n elements a un conjunt B amb m elements és:

(a) $\binom{n}{m}$
(b) $n \cdot m$
(c) n^m
(d) m^n

13. El número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es

(a) $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$
(b) 2^n
(c) 2^{n+1}
(d) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

14. A partir de la igualtat $(1-1)^n = 0$, hom pot demostrar que el nombre de possibles subconjunts, amb un nombre parell de elements, de un conjunt amb n elements és

(a) 2^n
(b) 2^{n-1}
(c) 2^{n-2}
(d) n^2

15. La fórmula del binomio de Newton permite afirmar que la función $f(x) = (x + \frac{1}{x})^{2n}$ se puede escribir en la forma

(a) $\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} x^k$
(b) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{n-k}$
(c) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2k}$
(d) $\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} x^{2k}$

16. La fórmula del binomi de Newton permet afirmar que la funció $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ es pot escriure també en la forma:

(a) $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} x^k$
(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{n-k}$
(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^{2k}$
(d) $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \binom{2n}{n-k} x^{2k}$

17. El número de formas en que pueden sentarse n personas en una mesa circular es

(a) n
(b) $n!$
(c) $(n-1)!$
(d) $n-1$

18. El nombre de maneres en que poden seure n persones en una taula circular de $n+1$ seients és

(a) n
(b) $n!$
(c) $(n-1)!$
(d) $n-1$

19. En el juego de las quinielas (3 símbolos posibles $1, X, 2$ para cada uno de los 14 partidos), los resultados X y 2 se llaman “variantes”. ¿Cuántos resultados posibles existen que contengan exactamente 4 variantes?

(a) 192192
(b) 16016
(c) 48048
(d) 24024

20. En el joc de les travesses (3 símbols possibles $1, X, 2$ per cada un dels 14 partits), els resultats X i 2 es diuen “variants”. Quants resultats possibles existeixen que tinguin exactament 4 variants?

(a) 192192
(b) 16016
(c) 48048
(d) 24024

21. Entre todas las secuencias de nueve dígitos $0, 1$ (números binarios) ¿Cuántos hay que contengan al menos siete 1's?

(a) 46
(b) 45
(c) 36
(d) 44

22. Entre totes les seqüències de nou dígits $0, 1$ (nombres binaris) Quantes n'hi ha que contenen al menys set 1's?

(a) 46

(b) 45

(c) 36

(d) 44

23. Entre todas las secuencias de nueve dígitos $0,1$ (números binarios) ¿Cuántos hay que se diferencian en exactamente tres dígitos de la secuencia 010101010?

(a) 120

(b) 72

(c) 128

(d) 84

24. Entre totes les seqüències de nou dígits $0,1$ (nombres binaris) Quantes n'hi ha que es diferencien en exactament tres dígits de la seqüència 010101010?

(a) 120

(b) 72

(c) 128

(d) 84

25. Los posibles subconjuntos de 3 elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ son ternas del tipo $i<j<k$, donde $j\in\{2,3,\ldots,n-1\}$. Esto permite afirmar que el número binomial $C_{n,3}=\binom{n}{3}$ es igual a

(a) $\sum_{j=2}^{n-1}(j-1)(n-j)$

(b) $\sum_{j=1}^{n} j(n-j)$

(c) $\sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)$

(d) $\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}$

(e) 24024

26. Els possibles subconjunts de 3 elements del conjunt $\{1,2,\ldots,n\}$ són ternes del tipus $i<j<k$, on $j\in\{2,3,\ldots,n-1\}$. Aquest fet permet deduir que el nombre binomial $C_{n,3}=\binom{n}{3}$ és igual a

(a) $\sum_{j=2}^{n-1}(j-1)(n-j)$

(b) $\sum_{j=1}^{n} j(n-j)$

(c) $\sum_{j=2}^{n-1} j(j+1)$

(d) $\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}$

3.2 Soluciones Test

1(c); **2**(d); **3**(a); **4**(b); **6**(d); **8**(d); **9**(d); **11**(d); **13**(b): $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$;
14(b); **15**(d); **17**(c); **18**(b); **19**(b); **21**(a); **23**(d); **25**(a);

3.3 Soluciones Problemas

1. (a) $A\cup B=B\cup C=\{1,2\}$, $B\cap C=\{2\}$; ...
(b) falso, cierto, falso ($1\neq\{1\}$), cierto;
(c) A, $\emptyset$, C.

2. (a) cierto; (b) falso; (c) falso; (d) verdadero.

5. $A\cup\emptyset=A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$, $A-\emptyset=A$, $\emptyset-A=\emptyset$, $A\times\emptyset=A$.

11. (a) $f(0)=-2/3$, $f(-2)=-4$; (b) $f^{-1}(13)=41/5$; (c) $x=2/5$; (d) $x=-2$; (e) $x<2/5$.

17. (a) falso; (b) cierto; (c) cierto; (d) cierto; (e) cierto.

18. (a) $\operatorname{card}(A)\geq\operatorname{card}(f(A))$;
(b) $\operatorname{card}(A)\leq\operatorname{card}(f(A))$;
(c) Si f es inyectiva, $\operatorname{card}(X)=\operatorname{card}(f(X))\leq\operatorname{card}(f(A))$ ya que $f(X)\subset Y$.
(d)...

19. Sean
$A:=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ y $B:=\{b_1,b_2,\ldots,a_m\}$. Si $m=n$, la aplicación f definida por $f(a_i)=b_i$, $i=1,2,\ldots,n$ es biyectiva. Inversamente, si existe una aplicación biyectiva $g:A\to B$, entonces $n=|f(A)|=|B|=m$.

20. (a) cierto; (b) falso; (c) cierto; (d) cierto.

21. Hacer gráficas de las diferentes situaciones.

22. Idem

23. Idem

24. (a) 8; (b) 6; (c) 2^n, $n!$

25. (a) $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=\binom{n}{m}$;
(b) $\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}=\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}$
$\frac{(n-m)(n-1)!+m(n-1)!}{m!(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=\binom{n}{m}$;
(c) $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n}{m}\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!}=\frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$.

26. **Triángulo de Tartaglia:**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \cdots & & & & & \end{array}$$

(a) Simetría respecto al eje central;
(b) Cada número es la suma de los dos inmediatamente superiores;
(c) ....

27. (a) $\binom{5}{3}\binom{21}{3} = 13300$;
(b) $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 4 \cdot 5 = 159600$.

4 Estructuras Algebráicas

4.1 Preguntas Test

1. Cualesquiera que sean los dígitos $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, el número *ababab* es divisible por

(a) $7, 11, 13$
(b) $3, 5, 7, 11$
(c) $3, 7, 13, 37$
(d) $7, 13, 17$

2. Si A y B representan, respectivamente, los (multi)conjuntos de primos divisores de los números a y b, y $\text{mcd}(a, b) = g$, entonces el conjunto $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (diferencia simétrica) representa el (multi)conjunto del número

(a) $\frac{ab}{g}$
(b) $\text{mcm}(a, b)$
(c) ab
(d) $\frac{ab}{g^2}$

3. El número $1,11111$, escrito en base 2, corresponde al número decimal

(a) $1,96875$
(b) $2,03125$
(c) 2
(d) $1,9375$

4. El número $1,111\ldots$, escrito en base 2, corresponde al número decimal

(a) $1,96875$
(b) $2,03125$
(c) 2
(d) $1,9375$

5. Dado un conjunto A, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A con la operación $\cup$ (reunión) *no* es un grupo debido a que

(a) ningún elemnto de $\mathcal{P}(A)$ tiene inverso
(b) $\cup$ no es asociativa
(c) $\cup$ no tiene elemento neutro
(d) ninguna de las anteriores

6. El número de elementos del grupo de simetrías de un tetraedro regular es

(a) 12
(b) 6
(c) 120
(d) 24

7. Se dice que un elemento a de un anillo commutativo $(A, +, \cdot)$ *no tiene divisores de cero* si

$$a \cdot b = b \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

para todo elemento $b \in A$. Entonces, si $a \cdot x = a \cdot y$, se puede afirmar que

(a) $x = 0$ ó $y = 0$
(b) $x = y$
(c) $a \cdot x = y \cdot a$
(d) ninguna de las anteriores

8. En el cuerpo $\mathbb{Z}_p$ de los enteros módulo p (p primo), el elemento inverso de $p - 1$ (respecto a la operación producto) es

(a) p
(b) 1
(c) depende del valor de p
(d) $p - 1$

9. En el conjunto $\mathcal{P}(A)$, de las partes del conjunto A, se define la relación

$$a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad |a| \leq |b|$$

Entonces se puede afirmar que:

(a) $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) $\mathcal{R}$ es una relación de orden, pero no es total.

(c) $\mathcal{R}$ es una relación de orden total.

(d) ninguna de las otras es cierta.

10. El peso x de un pan supera en más de kilo y medio el peso de medio pan. Entonces,

(a) $x = 3$

(b) $x > 2$

(c) $x \geq 2$

(d) $x > 3$

11. Dos amigos llegan a una cita entre las 9h. y las 10h. Uno llega a las 9h. xm. y espera 10m. El otro llega a las 9h. ym. y espera 15m. Entonces, la condición para que se encuentren es:

(a) $-15 \leq x - y \leq 10$

(b) $-10 \leq x - y \leq 15$

(c) $-10 \leq y - x \leq 15$

(d) ninguna de las otras

12. La suma de todos los números naturales que terminan en 3 y tienen como máximo 3 cifras es

(a) 49800

(b) 99600

(c) 99000

(d) 49600

13. Se sabe que una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es una progresión geométrica que satisface

$$a_n = -4a_{n-1} - 3a_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Entonces su razón es:

(a) 1 ó 3

(b) 1 ó -3

(c) 1 ó -1

(d) -1 ó -3

14. El cuadrado del polinomio $p = \sum_{k=0}^{n} x^k$ es

(a) $p^2 = \sum_{k=0}^{2n} x^k$

(b) $p^2 = \sum_{k=0}^{2n}(k+1)x^k$

(c) $p^2 = \sum_{k=0}^{2n}(n+1-k)x^k$

(d) $p^2 = \sum_{k=0}^{2n}(n+1-|k-n|)x^k$

15. Usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica, se deduce que la división entre polinomios

$$\frac{x^{n+1} - a^n}{x - a}, \qquad (a \in \mathbb{R}),$$

vale

(a) $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^n$

(b) $ax^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a$

(c) $ax^n + a^2x^{n-1} + a^3x^{n-2} + \cdots + a^{n+1}$

(d) $x^{n+1} + ax^n + a^2x^n + \cdots + a^nx + a^{n+1}$

16. Para calcular el valor de un polinomio p en cualquier punto dado $x = a$ se realizan los siguientes cálculos sucesivos (*"regla de Höner"*):
$c_1 = a - 2$;
$c_2 = c_1a + 4$;
$c_3 = c_2a + 3$;
$p(a) = c_3a + 9$.
Entonces se trata del polinomio

(a) $p = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 9$

(b) $p = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 3x - 9$

(c) $p = x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 4x - 2$

(d) $p = x^4 - 9x^3 - 3x^2 - 4x + 2$

17. Se sabe que, al dividir un polinomio $p(x)$ por el polinomio $q(x) = x^2 - x - 2$, se obtiene el resto $r(x) = x + 1$. Entonces, el valor de $p(2)$ es:

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

18. El máximo común divisor de los polinomios $p = x^3 - x$ y $q = x^3 + 3x^2 + 2x$ es

(a) $x^2 - x$

(b) $x^2 + x$

(c) $x^2 - 1$

(d) $x^2 + 1$

4.2 Soluciones Test

1(?); **2**(?); **3**(?); **4**(?); **5**(?); **6**(d); **7**(?); **8**(?); **9**(?); **10**(?); **11**(?); **12**(?); **13**(?); **14**(?); **15**(?); **16**(?); **17**(?); **18**(?);

4.3 Soluciones Problemas

1. 1101101(BIN)=155(OCT)=109(DEC)=91(HEX)

3. $6552 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$; $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$; $6552/156 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

4. $\frac{44}{105}$

7. (b) $r = \frac{1}{2}$; $S = \frac{2^{11}-1}{2^{10}} = \frac{2047}{1028} \approx 2$.

9. (c) $(a+b-c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b - 3a^2c - 3b^2c - 6abc$.

12. $\binom{15}{0}a^{15} + \binom{15}{1}a^{13} + \binom{15}{2}a^{11} + \binom{15}{3}a^9 + \binom{15}{4}a^7 + \binom{15}{5}a^5 + \binom{15}{6}a^3 + \binom{15}{7}a$.

18. (c)$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$; $(x+y)(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2$.

19. (a) $1R1$, $1R3$, $2R2$, $3R1$, $3R3$, $4R4$; (c) $\{1,3\}, \{2\}, \{4\}$.

26. $-1 < x < 2$

29. $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$, $c \leq b \leq a$.

30. $\sup\{A, B\} = A \cup B$, $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

5 Matrices y Sistemas Lineales

5.1 Preguntas Test

1. La recta de regresión de los puntos $(1,1), (1,2), (2,1)$ es:

(a) $y = -\frac{x}{2} + 2$
(b) $y = x$
(c) $y = x + 1$
(d) $y = \frac{13}{6}x - 2$

5.2 Soluciones Test

1(?);

5.3 Soluciones Problemas

1.

6 Espacios Vectoriales

6.1 Preguntas Test

1. ¿Cuál de los siguientes conjuntos no es un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$)?

(a) Los números reales
(b) Los vectores del plano con coordenadas enteras
(c) Los polinomios de grado menor o igual a tres
(d) Las matrices cuadradas de orden dos

6.2 Soluciones Test

1(?);

6.3 Soluciones Problemas

1.