ETSE de Telecomunicació de Barcelona

Fonaments d'Àlgebra. 1a prova (55 minuts) 07/10/2003

1. *Els vectors $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_3$ formen una base de l'espai. Són unitaris però no són ortogonals entre ells. Considera el vector $\vec{u}$, que té components $(1,0,-3)$ en la base $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$. Sabent que el mòdul de $\vec{u}$ és igual a 3, calcula l'angle que formen els vectors $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_3$.* ***1,5 punts***

Solució: L'angle demanat, α, verifica:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3}{|\vec{a}_1||\vec{a}_3|} = \vec{a}_1\cdot\vec{a}_3, \qquad (1)$$

on s'ha utilitzat que $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_3| = 1$, ja que són vectors unitaris. El vector $\vec{u}$ s'escriu:

$$\vec{u} = \vec{a}_1 - 3\,\vec{a}_3 \qquad (2)$$

i, d'altra banda, $|\vec{u}| = 3$. Recordant que $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$ s'arriba a la conclusió que $\vec{u}\cdot\vec{u} = 9$. Això implica, si tenim en compte l'equació (2):

$$\begin{aligned} & (\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3)\cdot(\vec{a}_1 - 3\vec{a}_3) = 9 \\ \Rightarrow\quad & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 - 3\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3 - 3\,\vec{a}_3\cdot\vec{a}_1 + 9\,\vec{a}_3\cdot\vec{a}_3 = 9 \\ \Rightarrow\quad & 1 - 6\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3 + 9 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}_1\cdot\vec{a}_3 = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

S'ha utilitzat que $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 = \vec{a}_3\cdot\vec{a}_3 = 1$, ja que són vectors unitaris. Substituint a l'equació (1), s'obté:

$$\boxed{\alpha = 80^{\circ}\,24'\,21''}$$

---

2. *Troba l'equació explícita de la recta de pendent positiu que forma un angle de $63^{\circ}\,26'\,6''$ amb l'eix d'abscisses i passa pel circumcentre del triangle de vèrtexs $A(-2,-3)$, $B(0,3)$ i $C(1,0)$.* ***2 punts***

Solució: Cal trobar el circumcentre del triangle, que és el punt on es tallen les tres mediatrius dels costats:

- La mediatriu del costat AB passa pel seu punt mig $M_1\left(\frac{-2+0}{2},\frac{-3+3}{2}\right) = (-1,0)$ i té com a vector director un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (2,6)$, que es pot prendre com $\vec{v}_1 = (-6,2)$:
$$r_1:\ \frac{x+1}{-6} = \frac{y}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x + 3y + 1 = 0.$$
- La mediatriu del costat BC passa pel seu punt mig $M_2\left(\frac{0+1}{2},\frac{3+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ i té com a vector director un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (1,-3)$, que es pot prendre com $\vec{v}_2 = (3,1)$:
$$r_2:\ \frac{x-\frac{1}{2}}{3} = \frac{y-\frac{3}{2}}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x - 3y + 4 = 0.$$
- La mediatriu del costat AC passa pel seu punt mig $M_3\left(\frac{-2+1}{2},\frac{-3+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ i té com a vector director un vector perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (3,3)$, que es pot prendre com $\vec{v}_3 = (-3,3)$:
$$r_3:\ \frac{x+\frac{1}{2}}{-3} = \frac{y+\frac{3}{2}}{3} \qquad \Rightarrow \qquad x + y + 2 = 0.$$

Resolent el sistema format per les equacions de dues d'aquestes mediatrius es troben les coordenades del circumcentre del triangle:

$$K\left(-\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right).$$

El pendent de la recta que es demana és: $m = \operatorname{tg} 63^{\circ}\,26'\,6' = 2$. Per tant, la seva equació explícita serà de la forma $y = 2x + n$. Imposant que el punt K sigui un punt d'aquesta recta hom troba que $n = \frac{11}{2}$. La recta demanada és, per tant:

$$\boxed{y = 2x + \tfrac{11}{2}}$$

---

3. *Sigui la recta r, d'equacions: $x = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0}$ i el punt $P(2,3,1)$.*

(a) *Escriu unes equacions per la recta s, que és, alhora, perpendicular i secant a r i passa pel punt P.* ***1,5 punts***

(b) *Dóna uns valors pels paràmetres a i b de manera que la recta d'equacions:*
$$\frac{x-1}{3a+b} = y = \frac{z+2a+b}{a+1}$$
talli la recta r i talli, també, la recta s. ***2 punts***

Solució:

(a) Sigui $Q(a,b,c)$ el punt on es tallen les rectes r i s. Donat que $Q \in r$ les seves coordenades han de verificar les equacions de la recta r, les quals es poden escriure:
$$r:\ \begin{cases} y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$
Com a conseqüència, cal que es verifiqui $b = 0$ i $c = 1$.
D'altra banda, la perpendicularitat de r i s implica que $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = 0$, on $\vec{v} = (1,0,0)$ és un vector director de la recta r:
$$(a-2, b-3, c-1)\cdot(1,0,0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$
Per tant, $Q(2,0,1)$ i un vector director de la recta s és $\overrightarrow{PQ} = (0,3,0) \sim (0,1,0)$. Unes possibles equacions són:
$$\boxed{s:\ \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{0}}$$

(b) Una condició suficient és que les tres rectes estiguin sobre un mateix pla i que la recta donada (t) no sigui paral·lela (o coincident) a r ni a s. El pla esmentat ha de ser el que conté r i s, l'equació del qual és:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z-1=0. \tag{3}$$

Perquè t estigui continguda en aquest pla és necessari que el seu vector director sigui perpendicular al vector normal d'aquest pla:

$$(3a+b,1,a+1)\cdot(0,0,1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a=-1}$$

Amb això s'aconsegueix que la recta t sigui paral·lela al pla que ve definit per les rectes r i s. Cal, però, que hi estigui continguda, és a dir, cal que el punt $A(1,0,-2a-b)\in t$ verifiqui l'equació (3) del pla definit per r i s:

$$-2a-b-1=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{b=1}$$

El vector director de la recta t és, per tant, $(-2,1,0)$, que no és linealment dependent al vector director de la recta r ni al vector director de la recta s, descartant-se el cas que t fos paral·lela a r o s.

---

4. *Selecciona l'única resposta correcta d'entre les quatre que es proposen per a cadascuna de les següents qüestions:*

(a) *Quantes rectes hi ha que siguin paral·leles a la recta d'equacions $x=y=z$ i passin pel punt $P(1,0,0)$?*

- *Cap.*
- *Una.*
- *Dues.*
- *Infinites.*

(b) *Quina és l'equació del pla que conté els eixos x i z?*

- $x=0$
- $y=0$
- $z=0$
- $x=z$

(c) *El vector director d'una recta $\vec{v}$ i un vector contingut a un pla $\vec{u}$ són tals que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. Aleshores ...*

- *La recta i el pla són necessàriament perpendiculars.*
- *La recta i el pla són necessàriament secants, però poden no ser perpendiculars.*
- *La recta i el pla no poden ser mai secants.*
- *La recta pot estar continguda al pla.*

(d) *Quina de les següents expressions representa una recta a l'espai que coincideix amb l'eix x?*

- $z=0$
- $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
- $x=0$
- $\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases}$

(e) *Sabem que hi ha un **únic** pla que conté, a la vegada, les rectes r i s. Llavors ...*

- *Les rectes r i s són necessàriament paral·leles.*
- *Les rectes r i s són necessàriament secants.*
- *Les rectes r i s poden ser paral·leles o secants, però no poden ser coincidents ni ser rectes que es creuen.*
- *Les rectes r i s poden ser paral·leles, secants o coincidents, però no poden ser rectes que es creuen.*

(f) *Tenim dos plans, les equacions cartesianes dels quals són $Ax+By+Cz+D=0$ i $A'x+B'y+C'z+D'=0$, verificant-se que $AA'+BB'+CC'=0$. Aleshores els plans són ...*

- *Necessàriament paral·lels.*
- *Necessàriament coincidents.*
- *Poden ser paral·lels o coincidents, però no secants.*
- *Necessàriament secants.*

+0,5 punts per cada resposta correcta
–0,1 punts per cada resposta incorrecta
0 punts per cada pregunta sense respondre

Solucions:

(a) Amb aquestes dades només es poden escriure les equacions d'**una** recta: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, que és paral·lela a la recta donada (r) ja que $P\notin r$.

(b) El vector normal d'aquest pla serà $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}=(0,-1,0)$. Per tant, l'única resposta correcta és $y=0$.

(c) La recta pot estar continguda en el pla ja que en aquest cas hi ha una direcció perpendicular a la recta que també està continguda en el pla. Això descarta les dues primeres opcions. La tercera opció és falsa perquè si la recta és perpendicular (és a dir, secant) al pla la condició de l'enunciat sí que es verifica.

(d) Els punts de l'eix z tenen coordenades del tipus $(0,0,z)$, és a dir, verifiquen les equacions $x=0$ i $y=0$ i, per tant, la resposta correcta és la segona.

(e) La resposta correcta és la tercera. Si les rectes fossin coincidents aleshores no hi hauria un *únic* pla, ja que una recta és continguda a *infinits* plans (el feix de plans que contenen la recta).

(f) Els dos plans són perpendiculars perquè els seus vectors normals també ho són (el seu producte escalar s'anul·la). Per tant són secants i la resposta correcta és l'última.