

ETSE de Telecomunicació
Fonaments d'Àlgebra

Control 3 Codi Prova: **230 00000 03 0 00**
10 de desembre de 2002 Temps: **1h**

1. Donada l'operació $x * y = x - 3xy + y$, definida en \mathbb{R} , podem afirmar:

(a) $*$ no té element neutre.

⇒ (b) Existeix l'element neutre, però no tot $x \in \mathbb{R}$ té element simètric.

(b) L'element simètric de 1 és $1/2$.

(c) $(\mathbb{R}, *)$ és un grup commutatiu.

2. El termes de grau 2 i 0 de

$$\left(2x + \frac{1}{x}\right)^8$$

valen, respectivament:

(a) Cap de les altres.

(b) 28 i 1

⇒ (c) 1792 i 1120

(c) 112 i 1.

3. Quina de les successions següents correspon a la successió de restes que s'obté en aplicar l'algorisme d'Euclides als enters 26026 i 19250?

⇒ (a) 6776, 5698, 1078, 308, 154, 0

(a) 6776, 5698, 1078, 154, 14, 0

(b) Cap de les altres.

(c) 6776, 5698, 154

4. Sigui E un conjunt i $\mathcal{P}(E)$ el conjunt de tots els seus subconjunts. Si \cap denota la intersecció d'elements de $\mathcal{P}(E)$, podem afirmar:

(a) \cap no és operació interna en $\mathcal{P}(E)$ perquè donats $A, B \in \mathcal{P}(E)$ no sempre $A \cap B$ pertany a $\mathcal{P}(E)$.

(b) L'element neutre de l'operació \cap és \emptyset .

⇒ (c) No tot $A \in \mathcal{P}(E)$ té element simètric respecte de l'operació \cap .

(c) $(\mathcal{P}(E), \cap)$ és grup commutatiu.

5. Sigui $*$ una operació interna en un conjunt A . Aleshores, podem afirmar:

(a) L'element neutre existeix i és únic.

(b) Per a tot $a \in A$, l'element simètric de a existeix, però no és necessàriament únic.

(c) Si $e \in A$ satisfà $a * e = a$ per a tot $a \in A$, llavors e és l'element neutre de l'operació.

⇒ (d) Si $*$ és una operació commutativa i $b \in A$ satisfà $a * b = a$ per a tot $a \in A$, llavors b és l'element neutre de l'operació.

6. Si $+$ i \bullet denoten la suma i multiplicació ordinàries, quin dels parells següents **no** té estructura de grup?

(a) $(\mathbb{Q} - \{0\}, \bullet)$

(b) $(\mathbb{R}, +)$

⇒ (c) (\mathbb{R}, \bullet)

(c) $(\mathbb{R} - \{0\}, \bullet)$

7. Sigui \mathcal{A} el conjunt de totes les aplicacions del conjunt $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ en ell mateix, amb la composició d'aplicacions \circ com a operació interna.

(a) (\mathcal{A}, \circ) és grup.

(b) L'element neutre és l'aplicació $e : X \rightarrow X$ tal que $e(x) = 1$, per a tot $x \in X$.

⇒ (c) Si \mathcal{G} és el subconjunt de \mathcal{A} format per aquelles aplicacions que són bijectives, aleshores (\mathcal{G}, \circ) és grup.

(c) Cap de les altres.

8. Sigui d el màxim comú divisor dels enters $a, b > 0$.

(a) Si existeixen enters x, y tals que $x \cdot a + y \cdot b = d$, aleshores $d = 1$.

(b) Si $b = q \cdot a + r$, $0 \leq r < a$, llavors d és també el màxim comú divisor de q i r .

(c) Si $z \in \mathbb{Z}$ divideix a a i b , aleshores d divideix a $(a + b)/z$.

⇒ (d) Si $b = q \cdot a + r$, i $a = q' \cdot r + r'$, $0 \leq r' < r < a$, llavors d és també el màxim comú divisor de r i r' .

9. Donat un polinomi $t(x)$, denotem per $\text{gr}(t)$ el seu grau. Siguin $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si $s(x) = p(x) + q(x)$, i $r(x) = p(x) \cdot q(x)$, aleshores:

(a) $\text{gr}(s) = \max(\text{gr}(p), \text{gr}(q))$ i $\text{gr}(r) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$

(b) $\text{gr}(s) \leq \max(\text{gr}(p), \text{gr}(q))$ i $\text{gr}(r) = \text{gr}(p) \cdot \text{gr}(q)$

(c) $\text{gr}(s) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$ i $\text{gr}(r) = \text{gr}(p) \cdot \text{gr}(q)$

⇒ (d) $\text{gr}(s) \leq \max(\text{gr}(p), \text{gr}(q))$ i $\text{gr}(r) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$

10. Sigui $(G, *)$ un grup amb element neutre e . Aleshores (z' representa l'element simètric de z):

(a) $(x * y)' = x' * y'$

(b) $a * x = b \implies x = b * a'$

⇒ (c) $a * x = b \implies x = a' * b$

(c) $a * x = b * x \implies x = e$

11. Quin dels anells següents conté elements que són divisors de zero? ($+$, \bullet denoten, respectivament, la suma i el producte ordinari, mentre que $+_n$, \bullet_n denoten la suma i el producte mòdul n .)

(a) $(\mathbb{Z}_3, +_3, \bullet_3)$

⇒ (b) $(\mathbb{Z}_4, +_4, \bullet_4)$

(b) $(\mathbb{R}, +, \bullet)$

(c) $(\mathbb{Q}, +, \bullet)$