**PROBLEMA 1**

**(a)** Trobeu la equació general (o implícita) del pla que passa per l'origen de coordenades i conté a la recta $r$ definida per:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 5z & = & 3 \end{array} \right.$$

**(b)** Demostreu per inducció la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\, 3^k = (n-1)\, 3^{n+1} + 3.$$

**(c)** Considereu el polinomi $p(x) = x^3 + ax^2 - bx + 6$, amb $a, b \in \mathbb{R}$. Determineu els valors de $a$ i $b$ per tal que els residus de les divisions de $p(x)$ per $x-1$ i $x+1$ valguin 5 i 3, respectivament.

**Resolució:**

(a) Busquem en primer lloc l'equació vectorial de la recta $r$. Considerant el sistema que la defineix tenim:

$$\left( \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{array} \right).$$

La solució d'aquest sistema és:

$$\begin{array}{l} z = t \\ y = -4 - 4t \\ x = -7 - 9t \end{array}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Per tant, l'equació vectorial de $r$ val:

$$(x, y, z) = (-7, -4, 0) + t\,(9, 4, 1),$$

d'on deduïm que $\vec{u} = (9, 4, 1)$ i $\vec{v} = (-7, 4, 0)$ són vectors directors del pla $\Pi$ buscat. ($\vec{v}$ és el vector amb origen el punt $(0, 0, 0)$ —que pertany a $\Pi$— i extrem el punt $(-7, 4, 0)$ que pertany a $r$.) Així, un vector normal a $\Pi$ és:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (4, -7, 8).$$

Per tant, l'equació general del pla és:

$$4x - 7y + 8z = 0.$$

(b) Trivialment es comprova que la fórmula es compleix quan $n = 1$. Suposem ara que la fórmula és certa per a un cert $n \geq 1$ i volem demostrar que també es compleix quan la formulem per a $n+1$. És a dir, volem comprovar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\,3^k = n\,3^{n+2}+3.$$

En efecte:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\,3^k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\,3^k + (2(n+1)-1)\,3^{n+1} =$$

$$\underbrace{(n-1)\,3^{n+1}+3}_{\text{hipótesi d'inducció}} + (2n+1)\,3^{n+1} = 3n\,3^{n+1}+3 = n\,3^{n+2}+3.$$

(c) Tenim:

$$\begin{array}{rcrcl} p(1) & = & 1+a-b+6 & = & 5 \\ p(-1) & = & -1+a+b+6 & = & 3 \end{array}$$

La solució d'aquest sistema és:

$$a = -2, \qquad b = 0.$$

Per tant:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 6.$$