FONAMENTS DE CÀLCUL

15 de gener de 2004 **Problemes** Temps 1h. 30m.

(Justifiqueu les respostes y detalleu els càlculs)

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.
   (a) Calculeu el domini de f. (1 punt)
   (b) Obteniu totes les asímptotes de f. (2 punts)
   (c) Estudieu els extrems relatius i els intervals de creixement i de decreixement de f. (2 punts)
   (d) Estudieu els punts d'inflexió i els intervals de concavidad i de convexidad de f. (1 punt)
   (e) Dibuixeu aproximadament la gràfica de f. (2 punts)
   (f) Dibuixeu les gràfiques de $|f(x)|$ i de $f(|x|)$. (2 punts)

2. (a) Obteniu, fent integració per parts, que una primitiva de la funció $f(x) = e^{-x}\sin x$ és $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ (3 punts)
   (b) Fent servir un canvi de variable calculeu una primitiva de $\sin(\ln t)$. (3 punts)
   Indicació: podeu fer servir la igualtat $\sin(\ln t) = -\sin(-\ln t)$
   (c) Calculeu
   $$a_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x}\sin x \ \mathrm{d}x$$
   per a $n \geq 0$ natural. (2 punts)
   (d) Comproveu que $a_{n+1} = r a_n$ per a tot n. Quant val r? (1 punt)
   (e) Calculeu la suma ilimitada $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ (1 punt)