FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

7 de noviembre de 2003
GRUPO 1
Justificad las respuestas y detallad los cálculos
Tiempo 1 h. 35m.

1) Considérese la sentencia:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + a}{6}$$

a) Hallad a de modo que la igualdad pueda sea cierta para $n = 2$. (0,5p.)
b) Para el valor hallado en a) de a, demostrad por inducción que para todo $n \geq 1$ la fórmula es cierta. (1,5p.)
c) Calculad

$$\lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{1 + n + n^2 + n^3}$$

(Si se desea se pueden usar resultados del apartado anterior.) (0.5p.)

2) Sea $a \in \mathbf{R}^+$. Calculad

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1 - a^n}{1 + a^n} \right)$$

(Si se considera conveniente se pueden distinguir varias situaciones para los valores de a, siendo una de ellas: $0 < a < 1$.) (1.5p.)

3) Hallad

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$$

(1.5p.)

4) Obtened

$$\lim \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$$

(1.5p.)

5) Hallad los subconjuntos de $\mathbf{R}$ que quedan definidos por
a)

$$(4x^2 - 4x + 1)(x - 1) > 0$$

(1p.)

b)

$$\left| \frac{x}{x - 1} \right| \leq \frac{1}{2}$$

(2p.)