

FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

10 de octubre de 2003

GRUPO 1

Justificad las respuestas y detallad los cálculos

Tiempo 1 h. 10m.

1) Sea $A > 0$. Considérese la expresión

$$A \sin x + B \cos x = R \sin(x + \phi)$$

a) Poned R y ϕ en función de A y de B . (1p.)

b) Usando lo anterior, hallad todas las soluciones de la ecuación:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(1p.)

2) Demostrad que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo viene dado por

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Para ello usad, sin demostrar, que:

Si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ entonces $\tan x \tan y + \tan x \tan z + \tan y \tan z = 1$. (2p.)

3)

a) Considérese la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hallad la recta tangente a un punto de la elipse, (x_0, y_0) , tal que $y_0 \neq 0$. (1p.)

b) Considérese la elipse

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Hallad los puntos de la elipse tales que la pendiente de la recta tangente en esos puntos sea $1/2$. (1p.)

4) Considérese la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$. Obtened la ecuación de esta hipérbola referida a sus asíntotas. (2p.)

5) Sea $k \in \mathbf{N}$ y sea $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ una progresión geométrica con razón $r = 1/2$ y $a_1 = 1$. Hallad, si existe, el menor número natural, n_0 , tal que $S_{n_0} \geq 2(1 - 2^{-2k})$. (Dejad el resultado en función de k .) (2p.)