Producto Escalar, Norma y Distancia

M.A. Fiol
ETSE de Telecomunicació
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: fiol@mat.upc.es

Abstract

Se estudian diferentes propiedades y resultados relacionados con el producto escalar de vectores. En particular, se obtienen diferentes relaciones geométricas en el plano y espacio euclídeos.

1 Producto Escalar

Sea X un **espacio vectorial** en el que tenemos definido un producto escalar. Por ejemplo, X puede ser el **espacio euclídeo** de n dimensiones, $\mathbb{R}^n$ (ligado a la geometría euclídea), con el producto escalar standard que, dados los vectores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, se define como

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{1}$$

A partir de esta definición, es sencillo comprobar que el producto escalar euclídeo cumple las siguientes propiedades:

(i) Conmutatividad: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(ii) Linealidad: $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$;

(iii) Positividad: $\langle u, u\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Por ejemplo, si estamos en el plano $X = \mathbb{R}^2$ tenemos el producto escalar

$$\langle u, v\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{2}$$

Alternativamente, si α_1 y α_2 son los ángulos que forman los vectores u y v con el eje OX, sabemos que $x_1 = |u| \cos\alpha_1$, $y_1 = |u| \sin\alpha_1$, $x_2 = |v| \cos\alpha_2$, $y_2 = |v| \cos\alpha_2$, donde $|u|$ y $|v|$ son las longitudes de los vectores u y v, respectivamente. Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos otra conocida expresión de dicho producto escalar:

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= |u||v|(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) \\ &= |u||v| \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = |u||v| \cos\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

donde $\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo formado por u y v. La expresión (2) sugiere también que podemos definir el ángulo $\alpha = \alpha\{u, v\}$ que forman dos vectores como

$$\alpha\{u, v\} := \cos^{-1}\left(\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}\right). \tag{4}$$

Así, los vectores u, v se dicen **ortogonales** cuando $\langle u, v\rangle = 0$ ó, lo que es lo mismo, $\alpha\{u, v\} := \frac{\pi}{2}$ (en nuestro caso decimos también que son perpendiculares). Notar que en el plano la anterior condición equivale a $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$, lo que podemos reescribir como

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_1}{y_2} \quad \text{ó} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{ó} \quad m_1 m_2 = -1$$

donde $m_1 = \frac{y_1}{x_1} = \tan\alpha_1$ es la **pendiente** de u (ó pendiente de la recta λu ($\lambda \in \mathbb{R}$) generada por el **vector director** u), y $m_2 = \frac{y_2}{x_2} = \tan\alpha_2$ es la pendiente de v.

2 Norma

Dado un producto escalar $\langle \cdot, \cdot\rangle$, podemos definir su **norma asociada** como

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle} \tag{5}$$

que cumple las siguientes propiedades:

(i) Positividad: $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$;

(ii) Proporcionalidad: $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$;

(iii) **Desigualdad triangular**: $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$.

Por ejemplo, en el plano la norma asociada al producto escalar (2) es:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = |u|$$

es decir, coincide con el **módulo** o **longitud** del vector $u = (x_1, y_1)$.

3 Distancia

Además, una norma $\|\cdot\|$ nos permite definir una **distancia** entre vectores como

$$d(u, v) := \|u - v\| \tag{6}$$

y cuyas propiedades básicas son las siguientes:

(i) Simetria: $d(u, v) = d(v, u)$;

(ii) Positividad: $d(u, v) \geq 0$ y $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$;

(iii) Desigualdad triangular: $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

En particular, notar que la norma de un vector u puede interpretarse como la distancia del punto u al origen: $\|u\| = d(u, 0)$.
En el plano, la distancia entre los vectores u, v o entre los puntos del plano $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ que representan, resulta ser:

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4 Ley de los cosenos

Dado un triángulo con lados a, b, c y ángulos A, B, C (ver Fig. 1), la llamada **ley de los cosenos** afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos C. \tag{7}$$

Este resultado puede verse como una relación entre tres vectores u, v, w que suman cero $u+v+w = 0$ ya que, entonces,

$$\begin{aligned} \|w\| &= \|-(u+v)\| = \|u+v\| = \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

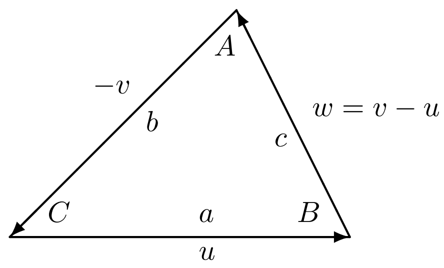

Figure 1: Triángulo $u + (v - u) + (-v) = 0$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \|w\| &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\{u, v\} \end{aligned}$$

Si elegimos los vectores u, $-v$ y $v - u$, con $|u| = a$, $|-v| = |v| = b$, $\cos\{u, -v\} = -\cos\{u, v\} = -C$ y $|v - u| = c$ (ver Figura 2) se obtiene la citada ley de los cosenos (7).
Como sabemos, en el caso de ortogonalidad $\cos C = 0$ y entonces la ley de los cosenos se transforma en el **Teorema de Pitágoras**:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ó} \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

5 Proyección y Descomposición Ortogonal

Se llama **descomposición ortogonal** de un vector u a su expresión como suma de otros dos vectores $u = v + w$ ortogonales entre sí, es decir $\langle u, v\rangle = 0$ (esto equivale a que forman un ángulo recto: $\alpha = \pi/2$). Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ el vector $u = (7, 2)$ puede descomponerse en la forma $u = v + w = (1, 3) + (6, -2)$ con $\langle v, w\rangle = 1 \times 6 + 3 \times (-2) = 0$.
Dados u, v, $v \neq 0$, interesa encontrar una descomposición ortogonal de u, $u = v' + u'$ de manera que v' tenga la misma dirección que v (se dice entonces que v y v' son **colineales**), es decir $v' = \lambda v$ para un cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Ver Fig. 2. Por tanto interesa encontrar λ de manera que $u = \lambda v + u'$ y u' sea ortogonal a v. Imponiendo esta condición, se obtiene la condición

$$\langle u', v\rangle = \langle u - \lambda v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \lambda\langle v, v\rangle = 0$$

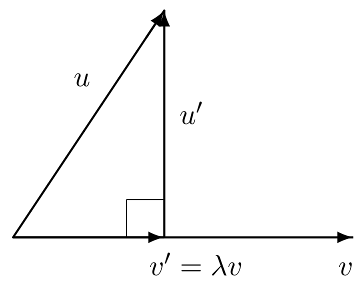

Figure 2: Descomposición $u = v' + u'$ ($v' \perp u'$)

de manera que

$$\lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

y los términos de la descomposición ortogonal de u son:

$$v' = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \quad \text{y} \quad u' = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \tag{9}$$

El vector v' en (9) recibe el nombre de **proyección ortogonal** de u sobre v. Por otra parte, notar que este proceso permite obtener, a partir de dos vectores u, v linealmente independientes, otros dos vectores v (ó v'), u' ortogonales. Este es el primer paso del llamado **método de ortogonalización de Gram-Schmidt**. Análogamente, se puede comprobar que, si tenemos tres vectores u, v, w linealmente independientes y u, v son ortogonales, el vector

$$w' := w - \frac{\langle w, u\rangle}{\|u\|^2} u - \frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} v \tag{10}$$

es ortogonal a u y a v.

6 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Aplicando el teorema de Pitágoras a los vectores u, v', u' calculados anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned} \|u'\|^2 &= \|u\|^2 - \|v'\|^2 = \|u\|^2 - \left\| \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v \right\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, como $\|u'\| \geq 0$, obtenemos que $\|u\|^2\|v\|^2 \geq \langle u, v\rangle^2$ o, equivalentemente, la llamada **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{11}$$

Notar que la igualdad se alcanza si y sólo si $\|u'\| = 0$, que equivale a $u' = 0$ ó, usando (9), $u = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$ (u es colineal con v). Como los términos implicados en ésta desigualdad son todos positivos, podemos escribirla también en la forma

$$0 \leq \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

lo que justifica la identificación del cociente anterior como el coseno de un cierto ángulo del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$; ver (4).

7 Distancia de un Punto a una Recta

Notar que las distancia del punto $P = u$ a la recta R generada por v viene dada por la norma $\|u'\|$. Por tanto, se obtiene

$$d(P, R) = \|u'\| = \sqrt{\|u\|^2 - \frac{\langle u, v\rangle^2}{\|v\|^2}}. \tag{12}$$

Como ejemplo, calculemos en $\mathbb{R}^2$ la distancia del punto $P = u = (a, b)$ a la recta R con **ecuación explícita** $Ax+By+C = 0$. Supongamos primero que $C = 0$ (recta que pasa por el origen). Entonces, usando el productos escalar euclídeo, la ecuación $Ax + By = 0$ puede escribirse como $\langle (A, B), (x, y)\rangle = 0$, lo que indica ortogonalidad entre los vectores (A, B) y (x, y). Por tanto un vector generador de R es $v = (-B, A)$. Así, la fórmula (12) nos da

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{(-Ba + Ab)^2}{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{Aa + Bb}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

En general, la distancia del punto (a, b) a la recta $Ax + By + C = 0$ resulta

$$d(P, R) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{14}$$

En efecto, con el cambio lineal de sistema de coordenadas $x = x' - \frac{C}{A}$, $y' = y$ (que mantiene invariantes las distancias), el punto y recta anteriores se transforman en $(a', b') = (a + \frac{C}{A}, b)$ y $Ax' + By' = 0$, respectivamente, con lo cual podemos aplicar la fórmula (13).

8 Areas

Notar que el **área del paralelogramo** P generado por los vectores u, v viene dada por el producto $\|v\|\|u'\|$ (base por altura). Por tanto, usando una vez más (12), se obtiene

$$a(P) = \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2}. \qquad (15)$$

Veamos dos casos extremos: Si u y v son ortogonales, $\langle u, v\rangle = 0$ y la fórmula anterior da $a(P) = \|u\|\|v\|$, como cabia esperar, pues P es un rectángulo de lados $\|u\|, \|v\|$. En cambio, si u y v son colineales, $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$ (caso límite de la desigualdad de Cauchy-Schwarz) y entonces $a(P) = 0$ (obvio, ya que todos los lados de P están sobre una misma línea).
Por ejemplo, en el plano, si $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, se obtiene

$$a(P) = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \pm(x_1y_2 - y_1x_2)$$

(obviamente, el signo debe elegirse de manera que se obtenga una cantidad positiva). Esta fórmula nos permite calcular el **área de un triángulo con vértices** (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). En efecto, dicha área es la misma que la del triángulo generado por los vectores $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$. Por tanto

$$a(P) = \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Así, tres puntos están alineados si y sólo si el determinante anterior da cero; y la **ecuación de la recta que pasa por dos puntos** (distintos) resulta ser:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

9 Volúmenes

Notar que, según (15), el área de un paralelogramos generado por u, v también puede escribirse como la raiz cuadrada de un cierto determinante

$$a(P) = \begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Así, es fácil intuir que el **volumen del paralelepípedo** P engendrado por los vectores u, v, w será:

$$v(P) = \begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

(Para demostrarlo, se puede calcular $a(P)\|w'\|$, donde $a(P)$ es el área en (15) y w' es el vector ortogonal a u, v dado en (11)).
Por ejemplo, en el espacio, con $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, y $w = (x_3, y_3, z_3)$ se obtiene

$$v(P) = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_2 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Esta fórmula nos permite también calcular el **volumen de un tetraedro** T con vértices (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), engendrado por los vectores $u = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $v = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $w = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} v(T) &= \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \\ &= \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, cuatro puntos del espacio están son **coplanarios** (es decir, están en un mismo plano) si y sólo si el determinante anterior da cero; y la **ecuación del plano que pasa por tres puntos** (no alineados) resulta ser:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$