Problemas y Demostraciones

M.A. Fiol
ETSE de Telecomunicació
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya
email: `fiol@mat.upc.es`

Abstract

Se describen varias estrategias posibles de demostración. Se proponen diferentes problemas cuya prueba puede realizarse con cada método considerado.

En los razonamientos lógicos que siguen, se supone que $A, B, \ldots$ representan ciertas proposiciones, como por ejemplo, *"la suma de tres números consecutivos es divisible por 3"*.

1 Demostración Directa

Para probar que

$$A \Rightarrow B$$

se "parte" de A (es decir, se supone que la **hipótesis** A es cierta) y se "llega" a B (se demuestra entonces que la **tésis** B es cierta).

Resolver, por demostración directa, los siguientes problemas:

Problema 1.1 *En una reunión de 6 personas siempre hay tres que se conocen o se desconocen mutuamente.*

Problema 1.2 *Sea T un triángulo de lados a, b, c y ángulos A, B, C (A es el ángulo opuesto al lado a y análogamente para B y C). Usando el producto escalar de vectores, demostrar la* **Ley de los cosenos:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Discutir los casos extremos: $C = 0$ **fórmula del binomio** *y $C = \frac{\pi}{2}$* **Teorema de Pitágoras**.

Problema 1.3 *Un número natural es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por 9.*

Problema 1.4 *Usando diagramas de Venn (que representan conjuntos), comprobar que el máximo común divisor de dos números m, n descompuestos en factores primos se obtiene al coger los factores "comunes con el menor exponente".*

2 Demostración por Reducción al Absurdo

Para probar que

$$A \Rightarrow B$$

se supone que $A \not\Rightarrow B$ y entonces se llega a un absurdo (por ejemplo que A y $\neg A$ son equivalentes).

Resolver, por reducción al absurdo, los siguientes problemas:

Problema 2.1 *Usando la descomposición (única) de un número en factores primos, demostrar que $\sqrt{2}$ no pertenece al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.*

Problema 2.2 *Demostrar que existen infinitos números primos.*

Problema 2.3 *(atribuido a Bertrand Rusell) Probar que, si suponemos $1 + 1 = 3$, podemos razonar que el Papa y Marx son una misma persona.*

3 Demostración por Contrarecíproco

Para probar que

$$A \Rightarrow B$$

se demuestra que $\neg B \Rightarrow \neg A$. (En términos de conjuntos se trataría de probar que $A \subset B$ comprobando que $\overline{B} \subset \overline{A}$).

Resolver, por contrarecíproco, los siguientes problemas:

Problema 3.1 *Sea T un triángulo de lados a, b, c y ángulos A, B, C. Utilizando la ley de los cosenos (Problema 1.2), demostrar que si $c^2 < a^2 + b^2$, entonces $C < \frac{\pi}{2}$. ¿Se cumple el recìproco?*

4 Demostración por Inducción

Para probar que la proposición

$$B(n)$$

se cumple para todo valor de $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ se demuestra:

1. $B(1)$ es cierta;

2. Si $B(n-1)$ es cierta, entonces $B(n)$ es cierta.

Resolver, mediante inducción, los siguientes problemas:

Problema 4.1 *El número máximo de trozos que se pueden obtener al realizar n cortes (rectos) en un pastel es*

$$N(n) = \frac{(n+1)n}{2} + 1 = \binom{n+1}{2} + 1.$$

Problema 4.2 *El número máximo de puntos en que se cortan n rectas distintas es*

$$P(n) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

¿El mínimo es 1?

Problema 4.3 Fórmula de Euler: *En un mapa plano con c países ("caras"), a fronteras ("aristas") y v intersecciones de fronteras ("vértices"), se cumple:*

$$c + v = a + 1.$$

5 Demostración Constructiva

Para probar que

$$A \Rightarrow B$$

a partir de un elemento de (que satisface) A se "construye" un elemento de B.

Resolver, por construción, los siguientes problemas:

Problema 5.1 *Todo número de 6 cifras de la forma abcabc es divisible por* 7, 11 *y* 13.

Problema 5.2 *Para cualquier número natural n, existen n números consecutivos compuestos; es decir, que* **no son** *primos.*

6 Otros Problemas

Usar alguna de las estrategias anteriores (y/o la imaginación) para resolver los siguientes problemas.

Problema 6.1 *Hallar la suma de los n primeros términos de una progresión geómetrica con primer término a_1 y razón r,*

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}, \end{aligned}$$

relacionando S_n consigo misma.

Problema 6.2 *Sean $u := (u_1, u_2)$, $v := (v_1, v_2)$ dos vectores del plano que forman, respectivamente, ángulos α, β con el eje OX. Demostrar que*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

si y sólo si

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = |u||v|\cos(\alpha - \beta)$$

donde $|\cdot|$ representa módulo o longitud del vector correspondiente.

Problema 6.3 *Sea T un triángulo de lados a, b, c y ángulos A, B, C. Usando el producto escalar de vectores, demostrar la* **Ley de los senos:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Problema 6.4 Permutaciones *de n elementos: Razonar por qué el número de ordenaciones posibles de n símbolos es*

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Probar la recurrencia

$$P_0 = 1, \quad P_n = nP_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Problema 6.5 Combinaciones *de m elementos tomados de n en n: Razonar por qué el número de subconjuntos de n elementos de un conjunto con $m (\geq n)$ elementos es*

$$\begin{aligned} C_{m,n} &= \frac{m!}{n!(m-n)!} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}. \end{aligned}$$

Probar la recurrencia

$$\begin{aligned} C_{m,1} &= C_{m,m} = 1, \\ C_{m,n} &= C_{m-1,n-1} + C_{m-1,n}, \quad n = 2, 3, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

Problema 6.6 *Con la notación* $C_{m,n} = \binom{m}{n}$, *probar las dos siguientes igualdades*

$$\begin{aligned}\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{m} &= 2^m\\ \binom{m}{0}-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}-\cdots+(-1)^m\binom{m}{m} &= 0\end{aligned}$$

Problema 6.7 *Demostrar que, para cualquier número natural* n,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

si y sólo si

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Problema 6.8 Variaciones *de* m *elementos tomados de* n *en* n*: Razonar por qué el número de sequencias de* n *elementos escogidos de un conjunto con* $m(\geq n)$ *elementos es*

$$\begin{aligned}V_{m,n} &= \frac{m!}{(m-n)!}\\ &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1).\end{aligned}$$

Probar la recurrencia

$$\begin{aligned}V_{m,1} &= m,\\ V_{m,n} &= nV_{m,n-1}, \quad n=2,3,\ldots,m.\end{aligned}$$

Problema 6.9 *Comprobar las dos siguientes igualdades:*

$$V_{m,m}=P_m, \quad V_{m,n}=C_{m,n}P_n$$

Problema 6.10 *En la lotería primitiva se eligen 6 números de 49 posibles. ¿Cuántas apuestas diferentes se pueden hacer?*

Problema 6.11 *En una mano de póker cada jugador recibe* 5 *cartas (de una baraja que contiene 13 números de cada figura:* $\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$*). ¿De cuántas formas puede un jugador recibir una "doble pareja" (por ejemplo,* $3\clubsuit, 3\diamondsuit, Q\heartsuit, Q\diamondsuit, 10\spadesuit$*; notar que* $3 \neq Q \neq 10$*).*

Problema 6.12 *Utilizando la fórmula de Euler (Problema 4.3), demostrar que el siguiente problema no tiene solución: Dadas tres casas* a, b, c *y tres fábricas* A, B, C *(por ejemplo, agua, gas y electricidad) se desea establecer una conexión entre cada casa y cada fábrica sin que las correspondientes canalizaciones (en total, nueve) se crucen.*

Problema 6.13 *Un torneo de tenis con* n *participantes se juega por eliminación. En cada "ronda" se juegan todos los partidos posibles (si algún jugador queda desaparejado, pasa directamente a la siguiente ronda). ¿Cuál es el número de partidos necesarios para determinar el campeón? (Por ejemplo, si* $n = 32$*, el número de partidos en cada ronda es* $16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$*; en total,* $16+8+4+2+1 = 31$ *partidos. En cambio si* $n = 19$*, deben jugarse* $9+5+2+1+1 = 18$ *partidos).*

Problema 6.14 *Demostrar que la cardinalidad (número de elementos) de la reunión de tres conjuntos* A, B, C *es*

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|\\ &- |A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|\\ &+ |A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

Generalizar a más conjuntos.

7 Algunas Soluciones

2.3 Supongamos que $3 = 1+1$. Restando 1 de cada término obtenemos que $2 = 1$. Entonces, como el Papa y Marx son dos, el Papa y Marx son uno.

6.1 La suma de los primeros n términos de una progresión geométrica

$$\begin{aligned}S_n &= a_1+a_1r+a_1r^2+a_1r^{n-1}\\ &= a_1+r\{a_1+a_1r+a_1r^2+a_1+r^{n-2}\}\\ &= a_1+r\{S_n-a_1r^{n-1}\}\end{aligned}$$

de donde, despejando S_n se obtiene

$$S_n=\frac{a_1r^n-a_1}{r-1}=\frac{a_nr-a_1}{r-1}.$$

6.12 Nos piden dibujar un mapa (plano) con $v = 6$ vértices (3 casas + 3 fábricas), $a = 9$ fronteras (3×3 conexiones y $c(=?)$ paises. Supongamos que existe tal mapa. Entonces, por una parte, usando la "fórmula de Euler" (supondremos que la región exterior —el "mar"—también es un país con lo cual $c+v = a+2$) tenemos que

$$c = a+2-v = 5. \tag{1}$$

Por otra parte, como todos los países tienen al menos 4 fronteras (en la configuración original no hay "ciclos" de longitud menor que 4), y cada frontera "pertenece" a 2 países, debe cumplirse

$$c \leq \frac{2a}{4} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad c \leq 4 \quad (c \text{ es entero})$$

en contradicción con (1). Como consecuencia, el supuesto mapa no existe.

6.13 Como en cada partido se elimina un jugador y sólo tiene que quedar uno (el campeón), hacen falta $n-1$ partidos. **Problema:** Pensar en una solución que involucre la representación de un número en base dos.

8 Símbolos y ...

8.1 Operadores Lógicos

$\neg$ negación
Si p es la proposición "ahora voy a usar el símbolo $\neg$", entonces $\neg p$ es ...

$\vee$ ó (no exclusivo)
$p \vee q$: se cumple p **o** q (o ambas).

$\wedge$ y
$p \wedge q$: se cumple p **y** q.

$\to$, $\Rightarrow$ implicación, si... entonces...
$p \to q$: p es **condición suficiente** para que se cumpla q.

$\leftarrow$, $\Leftarrow$ implicación inversa
$p \leftarrow q$: p es **condición necesaria** para que se cumpla q.

$\leftrightarrow$, $\iff$ equivalencia , si y sólo si
$p \leftrightarrow q$: p es **condición necesaria y suficiente** para que se cumpla q. O bien, p y q son **equivalentes**.

8.2 Conjuntos

cardina$|\cdot|$idad
Si $A := \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, entonces $|A| = 4$. Un conjunto con cardinalidad n se denomina a veces **n-conjunto**.

conjunto vací$\emptyset$
El conjunto vacío es el (único!) conjunto que no contiene ningún elemento, $|\emptyset| = 0$ (notar que $\emptyset$ es un 0-conjunto, pero $\emptyset \neq 0$ (¿por qué?).

$\mathcal{P}$artes de un conjunto
Si $|A| = n$, entonces $|\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^n$ (demostrarlo). Por ello, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ se denota también por 2^A(?).

p$\in$rtenece
Por ejemplo, $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (Problema 2.1).

p$\forall$ra todo
$\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n+1 \in \mathbb{N}$.

$\exists$xiste
Conjetura: Para todo número par $2n$, $\exists p, q$ primos tales que $p + q = 2n$.

$\cup$nión
$a \in A \cup B$ si $a \in A$ **o** $a \in B$.

i$\cap$tersección
$a \in A \cap B$ si $a \in A$ **y** $a \in B$.

$\setminus$ diferencia
$a \in A \setminus B$ si $a \in A$ pero $a \notin B$.

$\overline{A}$ complementario...
de un conjunto A, con respecto a otro conjunto Ω que contiene a A (lo cual se representa a veces como $\Omega \supset A$).
Si $a \in \Omega$, entonces $a \in \overline{A}$ si y sólo si $a \notin A$.
Se cumplen las igualdades $\overline{A} = \Omega \setminus A$, $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $\overline{A} \cup A = \Omega$.

8.3 Otros

$\perp$ perpendicular
Dos vectores u, v son perpendiculares ú **ortogonales**, $u \perp v$, si su producto escalar es nulo $u \cdot v = \langle u, v\rangle = 0$ (u y v forman un ángulo de 90º).

$\|$ paralelo
Dos vectores u, v son paralelos o **colineales**, $u \parallel v$, si su producto escalar es $\langle u, v\rangle = |u||v|$ (u y v forman un ángulo de 0º).

$\sum$ sumatorio
La letra griega mayúscula de σ es Σ, y corresponde a la "S" latina de "Suma".

$\int$ integral
La integral es el límite de una $\int$uma.

8.4 Una expresión intrigante

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}} \quad = \quad ??$$