ETS d'Enginyeria de Telecomunicació

Fonaments d'Àlgebra. Control 2

Control. 31 d'octubre de 2002 **Temps: 1h 40m**

---

1. Considereu el teorema següent: *Si la funció $f(x)$ és derivable en el punt $x = a$, aleshores $f(x)$ és contínua en aquest punt.*

(a) Reformuleu l'enunciat com una condició necessària.

(b) Formuleu el teorema contrarecíproc.

Resolució:

(a) Per tal que la funció $f(x)$ sigui derivable en el punt $x = a$ és necessari que $f(x)$ sigui contínua en aquest punt.

(b) Si la funció $f(x)$ no és contínua en el punt $x = a$, llavors $f(x)$ no és derivable en aquest punt.

---

2. Proveu per inducció la fórmula:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Resolució: La fórmula es compleix trivialment per a $n = 1$ ja que $1 = (1^2 \cdot 2^2)/4$. Suposem, doncs, que la fórmula es compleix per a n, i vegem que llavors es compleix també per a $n + 1$. En efecte,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) =$$

$$(n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

---

3. Sigui X un conjunt. Donats $A, B \in \mathcal{P}(X)$, recordeu que $A - B = \{x \in X : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. Demostreu:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

Resolució:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \ \cap\ (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \ \cap\ (\overline{A} \cup \overline{B}) =$$

$$((A \cup B) \cap \overline{A}) \ \cup\ ((A \cup B) \cap \overline{B}) = ((A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})) \ \cup\ ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})) =$$

$$(\emptyset \cup (B \cap \overline{A})) \ \cup\ ((A \cap \overline{B}) \cup \emptyset) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

---

4. Demostreu que l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x, y) = (x - y, x + y)$$

és bijectiva i determineu f^{-1}.

Resolució: Suposeu $f(x, y) = f(x', y')$. Tenim:

$$(x - y, x + y) = (x' - y', x' + y'),$$

d'on:

$$x - y = x' - y', \qquad x + y = x' + y'$$

Sumant les equacions anteriors:

$$2x = 2x' \Rightarrow x = x',$$

i restant-les:

$$2y = 2y' \Rightarrow y = y'.$$

Per tant,

$$f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y'),$$

i f és injectiva.

D'altra banda, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tenim:

$$f(x,y) = (a,b) \Longrightarrow (x-y, x+y) = (a,b),$$

és a dir,

$$x - y = a,\ x + y = b \ \Longrightarrow\ x = (a+b)/2,\ y = (b-a)/2.$$

Per tant, el parell

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

s'aplica per f sobre (a,b), la qual cosa ens demostra que f és una aplicació exhaustiva.

D'acord amb les consideracions anteriors, la inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ve definida per:

$$f(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

---

5. Considereu l'aplicació $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = (\cos x)^2.$$

(a) Determineu el conjunt imatge de f. Digueu si f és o no injectiva.
(b) Determineu $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(1/2)$ i $f^{-1}(0)$.
(c) Determineu $f(A)$ on $A = [0,\pi/4] \cup [3\pi/4,\pi]$.

Resolució:

(a) El conjunt imatge (recorregut) de f és $[0,1]$. L'aplicació f no és injectiva ja que, per exemple,

$$f(0) = (\cos 0)^2 = 1 = (\cos\pi)^2 = f(\pi).$$

(b)

$$f^{-1}(1) = \{0,\pi\}, \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}, \quad f^{-1}(0) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

(c)

$$f(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

---

6. Sigui $f : X \longrightarrow Y$ una aplicació bijectiva. Demostreu que si $g : Y \longrightarrow X$ satisfà $g \circ f = \mathrm{id}_X$, aleshores també es compleix $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Resolució: Si $g \circ f = \mathrm{id}_X$, llavors $g(f(z)) = z$ per a tot $z \in X$. Donat $y \in Y$, diem x a l'únic element de X que s'aplica sobre y. Tenim

$$f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y,$$

i, per tant, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.