

**ETS d'Enginyeria de Telecomunicació**  
**Fonaments d'Àlgebra. Control 1**

**Control. 8 d'octubre de 2002**

**Temps: 55m**

1. Considereu (en el pla) la recta  $\ell$  que passa pel punt  $P : (1, 2)$  en la direcció perpendicular al vector  $\vec{n} = (-2, -3)$ .
- (a) Doneu les equacions vectorial, paramètrica, contínua, implícita, explícita i normalitzada de  $\ell$ .
  - (b) Calculeu la distància del punt  $Q : (-1, 1)$  a  $\ell$ .
  - (c) Determineu l'equació de la recta perpendicular a  $\ell$  que passa per l'origen.

*Resolució:*

- (a) Tot vector director  $\vec{v}$  de la recta  $\ell$  compleix  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ . Podem prendre, per exemple,  $\vec{v} = (3, -2)$ . Per tant, per l'equació vectorial de  $\ell$  podem escriure:

$$(x, y) = (1, 2) + t(3, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Separant les components obtenim les equacions paramètriques de la recta:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pel que fa a l'equació contínua:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-2},$$

d'on obtenim l'equació implícita

$$2x + 3y - 8 = 0.$$

Aïllant  $y$  trobem l'equació explícita:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Finalment, l'equació normalitzada és:

$$\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{8}{\sqrt{13}} = 0.$$

- (b) A partir de l'equació normalitzada tenim:

$$d(Q, \ell) = \left| \left[ \frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{8}{\sqrt{13}} \right]_{x=-1, y=1} \right| = \left| -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{8}{\sqrt{13}} \right| = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

- (c) La recta que busquem té equació  $ax + by = 0$ , essent  $\vec{n}' = (a, b)$  un vector normal a la mateixa. D'altra banda,  $\vec{n} = (-2, -3)$  és un vector normal a  $\ell$ . Com que  $\vec{n}' \cdot \vec{n} = 0$ , podem prendre, per exemple  $\vec{n}' = (3, -2)$ , i tenim:

$$3x - 2y = 0.$$

2. Sigui  $\Pi$  el pla definit pels punts  $P : (1, 2, 0)$ ,  $Q : (2, 2, 2)$  i  $R : (0, 0, -2)$ .

- (a) Trobeu les seves equacions vectorial i implícita. Doneu l'equació vectorial de la recta paral·lela a  $\Pi$  que passa per l'origen de coordenades.
- (b) Determineu el punt d'intersecció de la recta que passa per  $Q$  en la direcció perpendicular a  $\Pi$  amb el pla  $x + y + z = 2$ .
- (c) Doneu l'equació contínua de la recta que passa per  $P$  formant amb  $\Pi$  un angle de  $\pi/6$  radians i, a més, és perpendicular a la direcció de l'eix  $z$ .

---

*Resolució:* (a) Si prenem, per exemple, els vectors directores  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 2)$  i  $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1, -2, -2)$ , obtenim l'equació vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda (1, 0, 2) + \mu (-1, -2, -2), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

El producte vectorial  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (4, 0, -2)$  ens proporciona un vector perpendicular al pla. Per tant, l'equació implícita de  $\Pi$  és:

$$(x - 1, y - 2, z) \cdot (4, 0, -2) = 0,$$

és a dir:

$$4x - 2z = 4.$$

Una recta paral·lela a  $\Pi$  que passi per l'origen de coordenades és l'eix  $y$ , ja que el vector  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  és ortogonal a  $\vec{n}$ . Per tant,

$$(x, y, z) = t (0, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

és l'equació de la recta buscada.

(b) Prenem  $\vec{n} = (4, 0, -2)$  com a vector director de la recta. Tenim, doncs:

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) + t (4, 0, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sigui  $t_0$  el valor de  $t$  per al qual s'obté el punt  $A$  d'intersecció amb el pla  $x + y + z = 2$ . Tenim:

$$[x + y + z]_{x=2+4t_0, y=2, z=2-2t_0} = 2,$$

és a dir:

$$(2 + 4t_0) + 2 + (2 - 2t_0) = 2,$$

d'on  $t_0 = -2$ , i  $A : (-6, 2, 6)$ .

(c) Sigui  $\vec{n} = (4, 0, -2)$  com en els apartats anteriors, i  $\hat{v} = (a, b, c)$  un vector unitari director de la recta que busquem. Sabem que:

$$\frac{|\vec{n} \cdot \hat{v}|}{|\vec{n}||\hat{v}|} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Com que  $|\vec{n}| = 2\sqrt{5}$ , podem escollim  $\hat{v}$  de tal forma que

$$\vec{n} \cdot \hat{v} = 4a - 2c = \sqrt{5}.$$

D'altra banda, com que  $\hat{v}$  ha de ser un vector perpendicular a  $(0, 0, 1)$  tenim  $c = 0$ . Per tant,  $a = \sqrt{5}/4$ , i com que  $\hat{v}$  ha de ser unitari:

$$\hat{v} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, 0\right).$$

L'equació de la recta que busquem és, doncs:

$$\frac{x - 1}{\sqrt{5}} = \frac{y - 2}{\sqrt{11}}, \quad z = 0$$