CURS D'INTRODUCCIÓ A L'ENGINYERIA DE TELECOMUNICACIÓ

TARDOR 2004

Fonaments d'Àlgebra
Problemes

- **Geometria del pla i de l'espai.**
- **Formalisme matemàtic. Mètodes de demostració.**
- **Conjunts i aplicacions.**
- **Estructures algèbriques. Nombres. Polinomis.**
- **Matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals.**
- **Espais Vectorials.**

Geometria del pla i de l'espai

Geometría del plano

1. Hallar un punto y un vector director de cada una de las rectas siguientes:

   (a) $(x,y) = (-1,0) + \lambda(2,-5)$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1+3\lambda \\ y & = & 2-5\lambda \end{array}\right.$

   (c) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$

   Representarlas gráficamente. Hallar 3 puntos de cada una de ellas.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P : (0,-4)$ y es paralela a la recta $(x,y) = (1,1) + \lambda(-2,1)$.

3. Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo cuyos lados tienen ecuaciones:

$$x - 2y + 1 = 0, \quad 3x + y - 4 = 0, \quad 2x + 3y - 19 = 0$$

4. (a) Hallar las ecuaciones del haz de rectas de vértice $(1,2)$.

   (b) Hallar la ecuación de la recta del haz que pasa por el punto $(7,5)$.

   (c) Hallar la ecuación de la recta del haz que es paralela a la recta de ecuación

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-3\lambda \\ y & = & 2-5\lambda \end{array}\right.$$

5. Excribir la ecuación de la recta $2x - y - 2 = 0$ en todas sus formas.

6. Comprobar que las ecuaciones de la forma $Ax + C = 0$ representan rectas: paralelas al eje y.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,1)$ y por el punto de corte de las rectas

$$(x,y) = (1,3) + \lambda(-5,1), \qquad \frac{x+4}{0} = \frac{y+1}{1}$$

8. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo tienen coordenadas $(1,2)$, $(4,-4)$, $(-5,-7)$. ÀCuáles son las coordenadas del cuarto vértice?

9. Hallar el valor del parámetro real a para que sean concurrentes las rectas:

$$x - y + 1 = 0, \quad 2x - y - 1 = 0, \quad x + ay - 11 = 0$$

10. Calcúlese el ángulo entre las rectas:

    (a) $x - 1 = (y+3)/5, \qquad 3x + 2y + 2 = 0$

    (b) $y = -2x + 5, \qquad y = 3x + 4$

    (c) $y = \sqrt{3}x + 7, \qquad y = -\sqrt{3}x - 2$

11. Demostrar que si ϕ es el ángulo entre las rectas $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$, entonces:

$$\tan\phi = \frac{|m_1 - m_2|}{|m_1m_2 + 1|}$$

12. Para qué valor de b las rectas
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5}, \quad \frac{x+1}{b} = \frac{y-6}{30}$$
son paralelas?

13. Para qué valor de a las rectas
$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{a}, \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{24}$$
son perpendiculares?

14. Escribir la ecuación normalizada de la recta $(x, y) = (-1, 1) + \lambda(3, 1)$. Hallar la distancia de dicha recta al origen.

15. Hallar la distancia entre las rectas paralelas
$$4x - 3y + 25, \qquad 8x - 6y + 25 = 0$$

16. Escríbanse las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $4x + 3y + 1 = 0$ y distan de ella 3 unidades.

17. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2)$ de manera que la distancia hasta ésta desde los puntos $(2, -3)$ y $(4, -5)$ sea igual.

18. Demostrar que el área del triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) viene dada por:
$$\frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Geometría del Espacio

19. (a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A : (1, -3, 4)$ y $B : (5, 1, 0)$.
    (b) Hallar las coordenadas del punto M que divide al segmento de extremos $A : (5, -2, 1)$ y $B : (1, 2, -7)$ en la razón $AM/AB = 3/4$.

20. Hallar la ecuación vectorial de la recta que:
    (a) pasa por el punto $(4, 1, -3)$ y tiene vector director $\vec{v} = (3, 4, 5)$;
    (b) pasa por los puntos $(1, 1, -2)$ y $(5, -3, 0)$.

21. Hallar la ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 3)$ y $(2, 2, 1)$ y tiene vector director $\vec{u} = (2, 0, 1)$.

22. Determinar las ecuaciones parámetricas y continuas de la mediana CM del triángulo con vértices en los puntos $A : (1, -2, -4)$, $B : (1, 6, -8)$ y $C : (-7, 11, 6)$.

23. Hállese la ecuación del plano que contiene a los puntos M_1, M_2 y M_3 si:
    (a) $M_1 : (-2, 3, 5)$, $M_2 : (4, -3, 0)$, $M_3 : (0, -6, 5)$
    (b) $M_1 : (2, 0, 4)$, $M_2 : (3, 1, -2)$, $M_3 : (0, -3, -1)$
    (c) $M_1 : (3, 1, -5)$, $M_2 : (8, 3, 3)$, $M_3 : (-2, -1, 4)$

24. Determinar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular al vector $\vec{n}$ si:
    (a) $P : (2, 3, 5)$, $\vec{n} = (4, 6, 0)$
    (b) $P : (3, -5, -2)$, $\vec{n} = (4, -6, 1)$

(c) $P:(0,0,0)$, $\vec{n}=(0,-7,4)$

(d) $P:(1,2,3)$, $\vec{n}=(0,1,0)$

25. Averiguar si las ecuaciones vectoriales

$$(x,y,z)=(4,-3,2)+\lambda(3,-5,-1),\qquad (x,y,z)=(-2,7,4)+\mu(-3,5,1)$$

representan la misma recta.

26. Averiguar si las ecuaciones vectoriales representan el mismo plano:

(a) $(x,y,z)=\lambda_1(1,1,0)+\mu_1(-2,4,3)$, $\quad (x,y,z)=(1,-5,-3)+\lambda_2(0,2,1)+\mu_2(7,-5,-6)$

(b) $(x,y,z)=(3,-2,5)+\langle(1,2,0),(2,1,0)\rangle$, $\quad (x,y,z)=(8,2,5)+\langle(1,2,0),(2,1,0)\rangle$

(c) $(x,y,z)=(1,-2,1)+\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$ $\quad (x,y,z)=(2,-1,2)+\langle(1,0,1),(1,1,2)\rangle$

27. Calcúlese el ángulo entre los planos:

(a) $x-4y-8z+1=0$, $\quad x+20y+7z=0$

(b) $6x+3y-2z-7=0$, $\quad x+2y+6z-5=0$

(c) $8x+4y+z=0$, $\quad 2x-2y+z+13=0$

(d) $x-z-7=0$, $\quad y-z+5=0$

28. Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $P:(3,-2,1)$ y $Q:(6,0,5)$ y es perpendicular al plano $x-y+2z=4$.

29. Hallar la intersección de la recta que pasa por los puntos $(4,6,6)$ y $(3,8,10)$ con el plano $(x,y,z)=(4,0,0)+\langle(3,2,0),(-5,0,2)\rangle$.

30. Estudiar la posición relativa de las rectas:

(a) $\dfrac{x-1}{2}=y-3=\dfrac{z-2}{3}$, $\quad \dfrac{x-7}{-4}=\dfrac{y-6}{-2}=\dfrac{z-11}{-6}$

(b) $\dfrac{x}{-3}=y+2=7-z$, $\quad \dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+5}{-2}$

(c) $x-1=\dfrac{y-2}{2}=z-3$, $\quad x-2=y-2=-z$

(d) $\dfrac{x-1}{2}=y-3=\dfrac{z-2}{3}$, $\quad \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$

(e) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0\\ x-y-5z-8 &=& 0\end{array}\right.$, $\quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& -1\\ y+2z &=& 1\end{array}\right.$

(f) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+z &=& 9\\ y &=& -4\end{array}\right.$, $\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y\\ 2y+z &=& -3x+5\end{array}\right.$

31. Estudiar la posición relativa de los planos:

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+z-7 &=& 0\\ -6x-4y-2z+11 &=& 0\end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z-5 &=& 0\\ 2x-4y+6z-10 &=& 0\end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+2z+4 &=& 0\\ 2x+y+z-5 &=& 0\end{array}\right.$

32. Estudiar la posición relativa de las rectas y planos:

(a) $\left\{\begin{array}{l} 3x+2y+z+13=0\\[2mm] x=y-2=\dfrac{z-3}{-1}\end{array}\right.$

(b) $\begin{cases} 3x - 9y + z + 22 = 0 \\ \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{3} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 7x + 4y - 5z + 7 = 0 \\ x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{3} \end{cases}$

33. Calcúlese la distancia del punto $(0, 1, -3)$ al plano que pasa por los puntos $(3, 1, -5)$, $(8, 3, 3)$ y $(-2, -1, 4)$.

34. Determinar el ángulo entre la recta y el plano:

    (a) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{0}, \qquad y + z + 7 = 0$

    (b) $\begin{cases} x &= 7 + 5t \\ y &= 4 + t \\ z &= 5 + 4t \end{cases}, \qquad 3x - y + 2z - 5 = 0$

    (c) $\begin{cases} 7x - 5y + 5z - 11 &= 0 \\ x - y + 3z + 7 &= 0 \end{cases}, \qquad 6x - 3y - 6z + 13 = 0$

35. Hallar la ecuación de la proyección de la recta $(x-1)/2 = (y+2)/(-3) = (z-2)/2$ sobre el plano $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Formalisme matemàtic

1. Feu la taula de veritat de $\neg p \wedge q$ i de $(p \to \neg q) \wedge q$. Què podeu dir d'aquestes dues proposicions?

2. Feu les negacions de les frases següents:
   (a) Els fars dels cotxes són blancs o grocs.
   (b) Aquest Nadal no aniré a esquiar i no faré vacances.
   (c) A tothom li agrada la botifarra de Vic.
   (d) Hi ha una persona a qui no li agrada el futbol.

3. Considereu la proposició següent: *si dos nombres enters sumen 6 llavors el producte és parell.*
   (a) Assigneu lletres als nombres dels quals es parla i formuleu matemàticament l'afirmació.
   (b) Indiqueu quina és la hipòtesi i quina és la tesi de l'afirmació.
   (c) Doneu un exemple pel qual sigui certa l'afirmació
   (d) Doneu un contraexemple que justifiqui que l'afirmació no és certa en general.
   (e) Escriviu quin seria el contrarecíproc d'aquesta afirmació.

4. Considereu la proposició següent: *la suma del quadrat d'un nombre senar i del cub d'un altre nombre senar és un nombre parell.*
   (a) Assigneu lletres als nombres dels quals es parla i formuleu matemàticament l'afirmació.
   (b) Indiqueu quina és la hipòtesi i quina és la tesi de l'afirmació.
   (c) Doneu un exemple pel qual sigui certa l'afirmació
   (d) Demostreu que l'afirmació és certa en general (Indicació: els nombres senars són els que es poden escriure de la forma $2n + 1$ per cert n).
   (e) Escriviu quin seria el contrarecíproc d'aquesta afirmació.

5. En el país dels selenites que viuen a la lluna HK23 del planeta SETBET hi ha calbs però també selenites melenuts tot i que ho disimulen amb cascos esfèrics de 60 cm de diàmetre. Sabem que en aquesta lluna hi viuen 600 milions de selenites. Justifiqueu que hi ha almenys dos selenites amb el mateix nombre de cabells al cap. (Indicació: feu un raonament per reducció a l'absurd fent servir que el nombre de cabells per cm^2 és de 30.000.)

6. (a) Escriviu com a suma de dos nombres primers els següents nombres parells : 22, 18, 30.
   (b) Escriviu amb la notació adequada la següent conjectura:
   "Tot nombre parell (excepte el 2) es pot expressar com a suma de dos nombres primers."

7. Observeu que $1 = 1$; $1 - 4 = -(1 + 2)$; $1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$.
   Completeu: $1 - 4 + 9 - 16 =$; $1 - 4 + 9 - 16 +$ $=$
   Quina regla general segueixen aquestes igualtats?

8. Estem buscant relacions entre el nombre de cares, vèrtexs i arestes d'un poliedre regular.

POLIEDRE	CARES	VÈRTEXS	ARESTES
TETRAEDRE	4	4	6
CUB	6	8	12
OCTAEDRE	8	6	12
DODECAEDRE	12	20	30
ICOSAEDRE	20	12	30

   Feu una conjectura sobre aquesta relació. Assigneu una lletra a cada variable i expresseu formalment la conjectura.

9. Observeu: $1^3 = 1$; $1^3 + 2^3 = 9$; $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$;

   Completeu: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 =$;

   Comproveu que la regla que segueixen aquestes igualtats es pot escriure de la següent forma:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2.$$

10. La suma de tots els angles interiors d'un polígon convex qualsevol depèn del nombre de costats. Observeu la taula següent i feu una conjectura. Escriviu aquesta conjectura per a un polígon de n costats utilizant el símbol de sumatori.

POLÍGON	SUMA D'ANGLES INTERIORS
Triangle	180°
Quadrilàter	360°
Pentàgon	540°
Hexàgon	720°

11. Com escriurieu, utilizant notació matemàtica, la següent propietat?

   "El producte de dos nombres senars és un nombre senar."

12. (a) Comproveu la següent conjectura per alguns casos concrets:

   "La suma dels n primers nombres senars és n^2"

   (b) Expresseu en notació matemàtica (utilizant el símbol de sumatori) la conjectura anterior.

13. Calculeu $\sum_{k=1}^{n} k$.

14. Una progressió aritmètica és una succesió de nombres cada un dels quals s'obté sumant a l'anterior un nombre fix anomenat diferència de la progressió.

   (a) Comprova la següent conjectura sobre progressions aritmètiques:

   "La suma de n termes d'una progressió aritmètica és igual a la semisuma del primer i últim termes multiplicada pel nombre de termes."

   (b) Escriviu la propietat anterior utilizant el símbol de sumatori i anomenant a_i al terme genèric de la successió.

15. Utilizeu els símbols $\forall, \exists$ per escriure la següent propietat:

   "Si al producte de dos nombres parells (o imparells) consecutius li sumem 1 el resultat és un quadrat perfecte."

   Comproveu que es compleix en alguns casos i demostreu-la.

16. (a) Escriviu la següent propietat utilizant el símbol de sumatori i el quantificador $\forall$:

   "La suma dels n primers nombres naturals senars és igual a n^2"

   (b) Comprovar la conjectura per $n = 1, 2, 3$.

   (c) Fer la demostració per inducció.

17. (a) Escriviu amb paraules la següent propietat:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

   (b) Demostreu-la pel mètode d'inducció.

18. Demostreu pel mètode d'inducció que un polígon de n costats té $n(n-3)/2$ diagonals.

19. Demostreu pel mètode d'inducció, en cas que siguin certes, les següents propietats.

    (a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(2n+1)(7n+1) = \dot{6}$.
    (b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! \geq 2^{n-1}$.
    (c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)^2 \geq 2^n$.

20. Donat un sistema d'equacions lineals es consideren les següents proposicions:
    R: "És un sistema compatible determinat"
    S: "Nombre d'equacions = Nombre d'incògnites"
    Estudieu si hi ha alguna implicació entre R i S.

21. Siguin les següents proposicions:
    R: "El treball d'una força és 0"
    S: "El desplaçament és 0"
    Establiu si S es condició necessària, suficient o necessària i suficient per que es verifiqui R.

22. És condició necessària i suficient per que un nombre sigui divisible per 5, que acabi en 5?

23. Comproveu si les següents implicacions son certes i si val el seu recíproc:

    (a) $(2y - 7 = 5) \Rightarrow (y = 6)$
    (b) $(a = 6, b = 4) \Rightarrow (ab = 24)$
    (c) $(x = 2) \Rightarrow (x^2 + 3x = 10)$
    (d) $(x^2 = 4x + 5) \Rightarrow (x = -1)$ ó $(x = 5)$
    (e) $(\tan u = 0) \Rightarrow (\sin u = 0)$
    (f) $(z = 45°) \Rightarrow (\tan z = 1)$
    (g) $(\cos 2x = 1) \Rightarrow (\sin x = 0)$
    (h) $(\sin x = 0) \Rightarrow (\sin 3x = 0)$
    (i) $(m, n$ son parells$) \Rightarrow (m + n)$ és parell

24. Establiu les implicacions que existeixin entre els dos enunciats:

    (a) $x + \sqrt{2x} = 4 \qquad (x = 2)$ ó $(x = 8)$
    (b) $x + \sqrt{2x} = 4 \qquad (x = 8)$
    (c) $x + \sqrt{2x} = 4 \qquad (x = 2)$
    (d) $x + \sqrt{2x} = 4 \qquad (0 \leq x \leq 10)$

Conjunts i aplicacions

1. Siguin $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, \{2\}\}$, $E = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$.
   (a) Calculeu $A \cup B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup E$, $D \cap E$.
   (b) Digueu si són certes o falses les afirmacions:
   $$A \cap B = \{1, 2\}, \qquad B \cap E = \emptyset, \qquad D \cup E = C, \qquad A \cap (B \cup C) = \{1\}.$$
   (c) Determineu els subconjunts de C:
   $$\{x \in C \ : \ x \leq 1\}, \qquad \{x \in C \ : \ x^2 < 0\}, \qquad \{x \in C \ : \ x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$
2. Sigui x un element d'un conjunt A. Justifiqueu si els següents enunciats són, en general, certs o no:
   (a) $\{x\} \subset A$.
   (b) $\{x\} \in A$.
   (c) $\{x\} \subset \mathcal{P}(A)$.
   (d) $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.
3. Considereu els conjunts $B = \{0, 1\}$, $D = \{0, 1, 0\}$, $A = \{0, 1, B\}$, $G = \{\, \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \,\}$, $C = \{y \,|\, y \in B \text{ o } y = B\}$. Digueu quins d'ells són iguals.
4. Definiu els conjunts $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ i $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ per extensió. Quina relació hi ha entre els tres conjunts?
5. Donat un conjunt A, determineu:
   $$A \cup \emptyset, \qquad A \cap \emptyset, \qquad A - \emptyset, \qquad \emptyset - A, \qquad A \times \emptyset.$$
6. Doneu exemples de conjunts A, B i C tals que:
   (a) $A \in B$, $B \in C$ i $A \notin C$.
   (b) $A \in B$, $B \in C$ i $A \in C$.
   (c) $A \in B$, $A \subset B$.
7. Sigui el conjunt $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}$. Representeu gràficament els conjunts:
   $$S = \{(x, y) \in A \ : \ x > -1\}, \qquad T = \{(x, y) \in A \ : \ 1 < y \leq 4\},$$
   $$U = \{y \in \mathbb{R} \ : \ (x, y) \in A\}, \qquad V = \{(x, y) \in A \ : \ (x, y) \in [-2, 2] \times [-1, 3]\}$$
8. Donats els subconjunts de $\mathbb{R}$: $A = [0, 2], B = [1, 3], C = [4, 6]$. Representeu gràficament (en la recta o el pla segons calgui) els conjunts:
   $$(A \cap B) \cup C, \qquad A \cap (B \cup C), \qquad (\mathbb{R} - A) \cap (\mathbb{R} - C),$$
   $$(A \times B) \cup (B \times A), \qquad (A \times B) \cap (B \times A), \qquad (A \times A) - (B \times B).$$
9. Sigui X un conjunt i siguin $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Demostreu que:
   (a) $A \cup B \in \mathcal{P}(X)$, $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$, $A - B \in \mathcal{P}(X)$, $\overline{A} \in \mathcal{P}(X)$, $\overline{B} \in \mathcal{P}(X)$.
   (b) Elements neutres: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$.
   (c) $\overline{\overline{A}} = A$.
   (d) $A \subset B$ si i només si $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(e) $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

(f) $A - B = A \cap (X - B)$.

(g) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = X$.

10. Siguin $A, B \in \mathcal{P}(X)$ on X és un conjunt finit. Demostreu que:

(a) Si $A \subset B$ aleshores $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(B)$.

(b) $\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$.

(c) $\mathrm{card}(X - A) = \mathrm{card}(X) - \mathrm{card}(A)$.

(d) $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A)\mathrm{card}(B)$.

(e) $\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\mathrm{card}(X)}$.

11. Sigui la funció real de variable real definida per $f(x) = \dfrac{5x-2}{3}$.

(a) Calculeu $f(0), f(-2)$.

(b) Trobeu l'antiimatge de 13.

(c) De qui és imatge el nombre 0?

(d) Trobeu els nombres tals que la imatge és el doble que l'original.

(e) Quins són els nombres pels quals les imatges són negatives?

12. Sigui la funció real de variable real definida per $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

(a) Determineu el domini.

(b) Trobeu l'antiimatge d'un nombre qualsevol.

(c) Determineu el recorregut.

(d) Trobeu la funció inversa (si en té).

(e) Raoneu si $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ és injectiva, exhaustiva, bijectiva. Podeu dir conjunts A, B tals que $f : A \longrightarrow B$ sigui bijectiva?

(f) Calculeu $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$.

13. Feu el mateix que a l'exercici anterior amb la funció real de variable real definida per $f(x) = \sqrt{2x-3}$. *(Indicació: a l'apartat b) distingiu si el nombre és positiu o negatiu).*

14. Feu el mateix que a l'exercici anterior amb la funció real de variable real definida per $f(x) = x^2 - 10x + 26$.

15. Determineu si les expressions següents defineixen aplicacions. En cas afirmatiu, trobeu el conjunt imatge i digueu quines són injectives, quines són exhaustives i quines són bijectives. En cas de que siguin bijectives determineu la seva inversa.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, amb $f(m) = 2m$.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, amb $f(n) = n + 1$.

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, amb $f(n) = n - 1$.

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amb $g(x) = x^3$.

(e) $h : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, amb $h(A) = A \cap B$, on $B \in \mathcal{P}(E)$ fixat.

(f) $k : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, amb $k(A) = A \cup B$, on $B \in \mathcal{P}(E)$ fixat.

(g) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, amb $i(x) = (0, x)$.

(h) $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, amb $f(A) = E - A$.

(i) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, amb $g(x) = 2x$.

(j) $\alpha : E \to \mathcal{P}(E)$, amb $\alpha(x) = \{x\}$.
(k) $f : A \times B \to B \times A$, amb $f(x, y) = (y, x)$.

16. Determineu quines de les següents aplicacions són injectives, exhaustives, o bijectives. En cada cas determineu l'antiimatge del zero i, en cas de que siguin bijectives determineu la seva inversa.

    (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, on $f(n) = (1 + (-1)^{n+1}(2n + 1))/4$.
    (b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, on $f(n) = n - n^2$.
    (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, on $f(n) = n - 2n^2$.
    (d) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, on $f(n) = 2n - 1$.
    (e) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, on $f(n) = 2n - n^2$.
    (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = 2x - x^2$.
    (g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = x^2 + 1$.

17. Siguin A i B conjunts i sigui $f : A \to B$ una aplicació. Justifiqueu si les següents propietats són certes o no.

    (a) $\mathrm{Im} f = B$.
    (b) $\mathrm{Im} f = f(A)$.
    (c) $f^{-1}(B) \subset A$.
    (d) $A \subset f^{-1}(B)$.
    (e) $f^{-1}(B) = A$.

18. Siguin X, Y conjunts i sigui $f : X \to Y$ una aplicació. Sigui A un subconjunt de X i sigui B un subconjunt de Y.

    (a) Estudieu quina relació hi ha entre $\mathrm{card}(A)$ i $\mathrm{card}(f(A))$.
    (b) Estudieu quina relació hi ha entre $\mathrm{card}(B)$ i $\mathrm{card}(f^{-1}(B))$.
    (c) Demostreu que si f és injectiva aleshores $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$.
    (d) Demostreu que si f és exhaustiva aleshores $\mathrm{card}(X) \geq \mathrm{card}(Y)$.

19. Siguin X, Y dos conjunts finits. Demostreu que X i Y tenen el mateix cardinal si i només si existeix una aplicació bijectiva entre X i Y.

20. Siguin $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$ aplicacions. Quines de les següents propietats són certes?.

    (a) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
    (b) $g \circ f = f \circ g$.
    (c) $\mathrm{Id}_B \circ f = f$ i $f \circ \mathrm{Id}_A = f$.
    (d) $\mathrm{Id}_A^{-1} = \mathrm{Id}_A$.

21. Siguin $f : A \to B$ i $g : B \to C$ aplicacions. Demostreu:

    (a) Si f i g són injectives, aleshores $g \circ f$ és injectiva.
    (b) Si f i g són exhaustives, aleshores $g \circ f$ és exhaustiva.
    (c) Si f i g són bijectives, aleshores $g \circ f$ és bijectiva.
    (d) Si $g \circ f$ és injectiva, aleshores f és injectiva.
    (e) Si $g \circ f$ és exhaustiva, aleshores g és exhaustiva.
    (f) Si $g \circ f$ és bijectiva, aleshores f és injectiva i g exhaustiva.

22. Siguin $f : A \to B$ i $g : B \to C$ aplicacions bijectives. Demostreu que: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

23. Sigui $f : A \to B$ una aplicació bijectiva. Demostreu que, aleshores f^{-1} també és bijectiva i que $(f^{-1})^{-1} = f$.

24. Donats els conjunts $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{0, 1\}$

    (a) Determineu totes les aplicacions $f : A \to B$.

    (b) Determineu totes les aplicacions bijectives $f : A \to A$.

    (c) Si fos $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, quantes aplicacions surtirien en els anteriors apartats? (no cal calcular-les.)

25. Demostreu les següents igualtats:

    (a) $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-m \end{pmatrix}$.

    (b) $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$.

    (c) $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n}{m} \begin{pmatrix} n-1 \\ m-1 \end{pmatrix}$.

26. Representeu tots els nombres combinatoris en forma de triangle posant en la fila n la seqüència $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$.

    Com es manifesten les propietats del problema anterior en aquest triangle?

27. A partir de les lletres `ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ`:

    (a) De quantes maneres podem triar tres vocals i tres consonants totes diferents i sense que importi l'ordre?

    (b) Quantes seqüències de quatre lletres diferents que continguin una vocal existeixen?

Estructures algèbriques. Nombres. Polinomis

1. Completeu la taula fent els canvis de base necessaris. (Binari és base 2, octal és base 8, decimal és base 10 i hexadecimal és base 16.)

BINARI	OCTAL	DECIMAL	HEXADECIMAL
		351	
			1C2
	73		
1101101			

2. L'expressió decimal d'un nombre enter no negatiu p és la seqüència de xifres $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_0$ (on $0 \leq a_i \leq 9$ per a tot i) de manera que $p = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$. Raoneu a partir d'aquesta representació que un nombre:
   (a) és divisible per 2 si la seva última xifra (a_0) és parell.
   (b) és divisible per 3 si la suma de les seves xifres ho és.
   (c) és divisible per 5 si la seva última xifra és 0 ó 5.

3. Descomposeu en factors primers els nombres enters 6552 i 156. Utilitzeu aquesta descomposició per a dividir 6552/156.

4. Calculeu:
$$\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} - \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}{2 + \frac{3}{\frac{1}{2+\frac{1}{5}}-1}}.$$

5. Racionalitzeu i simplifiqueu:
   (a) $3/\sqrt{3}$ (b) $3/\sqrt[3]{3}$ (c) $2/\sqrt{2}$ (d) $2/\sqrt[4]{2}$
   (e) $6/\sqrt{3}$ (f) $6/\sqrt[3]{3}$ (g) $4/\sqrt{2}$ (h) $4/\sqrt{4}$
   (i) $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ (j) $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ (k) $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$

6. (a) Expresseu amb una sola potència:
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}.$$
   (b) Calculeu:
$$((((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}.$$

7. Una progressió geomètrica és una successió on cada terme s'obté multiplicant l'anterior per una constant fixada que s'anomena raó. Per exemple, $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ (la raó val 3). En general, si el primer terme és a_0 i la raó r, la successió és $a_0, a_0 r, a_0 r^2, a_0 r^3, a_0 r^4, \ldots$
   (a) Demostreu que (per $r \neq 1$):
$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n = a_0 \frac{r^{n+1}-1}{r-1}.$$
   (b) Determineu la raó i sumeu:
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024}.$$

8. Efectueu operacions de manera que només apareguin exponents positius
   (a) $\dfrac{x^{-3} \cdot y + x \cdot y^3}{x^{-2} \cdot y^{-3}}$ (b) $(y^3 + 2y^{-2})(3y - y^{-3})$ (c) $\dfrac{2y^{-1} + 3y^{-2} + 4y^{-3}}{5y^2 + 4}$

9. Desarrolleu les següents expressions:

   (a) $(2a-3b^2)^6$.

   (b) $(\frac{a}{2}-\frac{2}{a^2})^4$.

   (c) $(a+b-c)^3$.

10. Trobeu el coeficient de:
    (a) x^{14} en $(x^3+\frac{1}{x^2})^{13}$. (b) y^{-4} en $(\frac{1}{4y^2}-\frac{2y^2}{3})^{14}$.

11. Determineu x sabent que són oposats els termes amb x^4 i x^5 en el desenvolupament de $(-2x+3/2)^7$.

12. Trobeu els termes del desenvolupament de $(a+a^{-2})^{15}$ pels quals l'exponent de a és positiu.

13. Proveu que en un grup

    (a) $(a^{-1})^{-1}=a$

    (b) $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

14. Considereu el conjunt $G=\mathbb{R}-\{1\}$ i l'operació $*$ definida $x*y=x+y-xy$.

    (a) Demostreu que l'operació és interna en G.

    (b) Demostreu que $*$ és associativa.

    (c) Trobeu l'element neutre per $*$.

    (d) Trobeu l'invers d'un element arbitrari x.

    (e) Quina estructura té $(G,*)$?

    (f) Demostreu que $*$ és commutativa.

15. A partir de les propietats que ja coneixeu verifiqueu l'estructura d'anell dels següents conjunts:

    (a) $(\mathcal{F},+,\cdot)$, on $\mathcal{F}$ és el conjunt de totes les funcions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

    (b) $(\mathcal{M}_n,+,\cdot)$, on $\mathcal{M}_n$ és el conjunt de totes les matrius quadrades d'ordre n a coeficients reals.

    (c) Doneu algun exemple on es vegi que en el primer apartat no podem utilitzar la composició de funcions en lloc del producte. (Indicació: Que passa amb la propietat distributiva?)

    (d) Si considerem subconjunts $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ i $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}_n$, que cal verificar per saber si $(\mathcal{H},+,\cdot)$ o $(\mathcal{N},+,\cdot)$ són anells?

16. Demostreu que el conjunt de matrius $A=\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ amb la suma i el producte habituals formen un cos commutatiu.

17. Sigui $A=${funcions reals tals que $f(x)=ax+b$, amb $a,b\in\mathbb{R}$}. Comproveu que $(A,+,\circ)$ és anell.

18. (a) Demostreu que en un anell *commutatiu* valen les fórmules

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2.$$

    (b) En el cas de l'anell de matrius 2×2, preneu $x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0\end{pmatrix}$ i calculeu els dos costats de les anteriors igualtats.

    (c) Com s'han de modificar les anteriors fórmules per a que siguin vàlides en un anell arbitrari?

19. Sigui $A=\{1,2,3,4\}$ i la relació $xRy\Leftrightarrow x=y$ ó $x+y=4$.

    (a) Definiu R per extensió.

(b) Verifiqueu que R és d'equivalència.

(c) Determineu les classes d'equivalència.

20. La construcció formal del conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals a partir dels nombres enters procedeix de la següent manera: Sigui $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. En el conjunt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ es defineix

$$(p,q) \equiv (r,s) \Leftrightarrow ps = qr.$$

(a) Comproveu que és una relació d'equivalència.

(b) Demostreu que si $(p,q) \equiv (r,s)$, llavors $(pt,qt) \equiv (ru,su)\ \forall t,u \in \mathbb{Z}^*$.

(c) En el conjunt quocient de $Z \times Z^*$ per aquesta relacio d'equivalencia hi definim les operacions suma i el producte: $\overline{(p_1,q_1)}+\overline{(p_2,q_2)} = \overline{(p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)}$, $\overline{(p_1,q_1)}\cdot\overline{(p_2,q_2)} = \overline{(p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)}$. Comproveu que aquestes operacions estan ben definides i que determinen una estructura de cos commutatiu en el conjunt quocient.

(d) Observeu que amb aquestes operacions el conjunt quocient es correspon amb el cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals identificant la classe $\overline{(p,q)}$ amb el racional p/q

21. Al conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters es defineix la relació

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } x - y = nk$$

on $n \geq 2$ és un enter fixat.

(a) Demostreu que aquesta relació és d'equivalència.

(b) El conjunt quocient s'anomena anell de congruències mòdul n i es denota $\mathbb{Z}_n$. Quantes classes d'equivalència hi ha?

(c) Denotem la classe de $x \in \mathbb{Z}$ com $\overline{x}$. Es defineix una suma i un producte en $\mathbb{Z}_n$ a través de $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$, $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$. Comproveu que estan ben definides i que $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ és un anell commutatiu.

22. (a) Construiu la taula de $(\mathbb{Z}_4, +)$. Investigueu si forma grup. El mateix amb $\mathbb{Z}_7$.

(b) Diem que un anell verifica la llei de simplificació si

$$x \cdot z = y \cdot z, z \neq 0 \Rightarrow x = y.$$

Demostreu que això passa si i només si el producte de dos elements no nuls sempre és no nul.

(c) Construiu la taula de $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$. Es possible la simplificació en $\mathbb{Z}_4$? El mateix amb $\mathbb{Z}_7$.

(d) Per quins valors de n és vàlida la simplificació en $\mathbb{Z}_n$?

23. Demostreu que un nombre enter és divisible per 11 si i només si la suma de les xifres en lloc parell menys la suma de les xifres en lloc senar ho és.

24. Sigui r una recta del pla Π. Al conjunt $\Pi - r$ definim la relació $A \sim B \Leftrightarrow \overline{AB} \cap r = \emptyset$. (És a dir, dos punts estan relacionats si el segment que els uneix no intersecta r.)

(a) Proveu que $\sim$ és d'equivalència en $\Pi - r$.

(b) Trobeu les classes d'equivalència.

25. En $\mathbb{R}$ definim la relació $x\rho y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : x \in [m, m+1), y \in [m, m+1)$.

(a) Verifiqueu que és d'equivalència.

(b) Trobeu el conjunt quocient.

(c) Que passa si canviem $[m, m+1)$ per $[m, m+1]$?

26. Resoldre

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x-2 & < & 0 \\ -3 & < & x-2 \end{array} \right.$$

27. Un alumne tarda de 15 a 20 minuts en arribar a la universitat. Les aules s'obren a les 7:45 i hi ha una tolerància de 10 minuts des de les 8, hora d'inici de les classes. Un alumne surt de casa a les 7 hores x minuts. Quant ha de valer x per que:

    (a) arribi abans d'hora?

    (b) en la franja permesa?

    (c) tard?

28. Un pare i un fill es porten 30 anys. En quin període de les seves vides l'edat del pare supera en més de 5 anys el doble de la del fill?

29. Sigui $A = \{a, b, c\}$. Definiu 6 relacions d'ordre diferents.

30. Si X és un conjunt, la inclusió ($\subset$) és una relació d'ordre en $\mathcal{P}(X)$. Donats $A, B \in \mathcal{P}(X)$ trobeu $\sup\{A, B\}$ i $\inf\{A, B\}$.

31. Estudieu l'existència de màxim, mínim, suprem i ínfim en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{R}$ ordenats per "$\leq$".

32. Analitzeu l'existència de màxim, mínim, suprem i ínfim en els subconjunts de $\mathbb{R}$

$$A = [0,1], \qquad B = (0,1], \qquad C = [0,1), \qquad D = (0,1),$$

$$E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq 1\}, \qquad F = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}, \qquad G = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

33. En $\mathbb{Z}$ es defineix la relació "divideix":

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists a' \in \mathbb{Z} : b = aa'.$$

    Proveu que no és d'ordre en $\mathbb{Z}$ però si en $\mathbb{Z}^+$.

34. Donats els polinomis

$$P = 2 + 4x - 5x^3 + 2x^4, \qquad Q = 3 + 5x - 5x^2 + 5x^4, \qquad R = x + 5x^3 - 7x^4.$$

    (a) Calculeu els polinomis $A = P + Q + R$, $B = PQR$, $C = PQ - RP$.

    (b) Relacioneu els graus de A, B, C amb els de P, Q, R.

35. Trobeu a i b tals que es cumpleixi la següent igualtat

$$2x + 1 = a(x-1) + b(x+2).$$

36. Quins valors han de tenir m, n, p per que sigui nul·la la suma dels polinomis:

$$A = 5x^2 + 7x + 3, \qquad B = m + nx - 6x^2, \qquad C = 8 + 3x - px^2.$$

37. Desarrolleu:

    (a) $(x^2 - x + 1)^4$.

    (b) $(x-1)^4 + (x+1)^4$.

38. Trobeu a i b tals que el polinomi $9x^4 - 13x^3 + 10x^2 + ax + b$ sigui un quadrat perfecte.

39. (a) Quin és el grau del quocient en la divisió $(8x^{13} - 2x^9 + 10) : (3x^8 - 6x^5 + 2x - 4)$?

    (b) Si el grau del dividend és 27 i el grau del divisor 15, Quin és el grau del quocient?

    (c) Qué es pot dir del grau del residu els anteriors apartats?

40. Trobeu el quocient i el residu de les següents divisions:

   (a) $1 : x$.
   (b) $(8x^3 - 3x^2 + 10) : (5x)$.
   (c) $(4x^3 - 12x^2 + 17x - 10) : (2x - 3)$.
   (d) $(6x^4 - 17x^2 + 4x - 3) : (3x^2 - 4x + 1)$.
   (e) $(8x^5 - 13x^4 + 7x - 1) : (2x^2 - 5x + 3)$.
   (f) $(x^5) : (x^2 - 3x + 1)$.
   (g) $(x^3 - 3x + 1) : (x + \frac{1}{2})$.

41. Trobeu els següents quocients:

   (a) $(x^3 - 8) : (x - 2)$.
   (b) $(x^6 - 2^6) : (x + 2)$.
   (c) $(x^6 - 2^6) : (x - 2)$.
   (d) $(x^4 - 5^4) : (x + 5)$.
   (e) $(x^{13} - 7^{13}) : (x - 7)$.
   (f) Generalitzeu aquestes expressions.

42. Trobeu a tal que el residu de la divisió $(2x^3 - ax + 10) : (x + 1/3)$ sigui 3.

43. Sigui $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomi tal que al dividir-lo per $x - 1$ el residu es 3, al dividir-o per x també dóna residu 3 i al dividir-lo per $x + 1$ el residu és 1. Quin és el residu al dividir p per $x^3 - x$?

44. Trobeu a tal que el polinomi $x^4 + ax^2 - 5x + 1$ dóna residu 1 al dividir-lo per $x - 1$.

45. Trobeu m tal que el valor numèric de $P = 3x^6 + 7x^4 + mx^2 + 2mx + 1$ per $x = 2$ és 321.

46. Trobeu el màxim comú divisor entre els polinomis p i q de $\mathbb{R}[x]$:

   (a) $p = x^3 - 2,\ q = x^2 + x + 2$.
   (b) $p = x^4 - 1,\ q = x^3 - 3x - 2$.

47. Trobeu el màxim comú divisor i la identitat de Bezout dels polinomis p i q de $\mathbb{R}[x]$:

   (a) $p = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 9,\ q = x^6 - 5x^5 + x^4 + 5x^3 + 23x^2 + 17x + 12$.
   (b) $p = x^4 - 2x^2 + 1,\ q = x^4 + 3x^2 + 2$.

Matrius, determinants i sistemes d'equacions

1. Busqueu l'antiimatge dels vectors $(0,0)$ i $(3,2)$ per l'aplicació:

   (a) $\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbf{R^2} & \longrightarrow & \mathbf{R^2} \\ & (x,y) & \longrightarrow & (2x+2y, x+y) \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbf{R^2} & \longrightarrow & \mathbf{R^2} \\ & (x,y) & \longrightarrow & (2x+2y, x-y) \end{array}$

2. Als vectors del pla se'ls sotmet a un gir de $\pi/4$ i després a una simetria respecte l'eix d'abcises.

   (a) Doneu la matriu associada a aquesta transformació.

   (b) Quin és el moviment que torna a la posició inicial?

3. Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   indiqueu quins dels següents productes tenen sentit i calculeu-los:

$$AB, AD, AC, BA, BD, CD, DC.$$

4. Siguin A, B i C matrius quadrades. Digueu si les següents propietats són certes o no. En cas afirmatiu, demostreu-ho. En cas contrari, doneu un contraexemple:

   (a) Si $AB = 0$, aleshores $A = 0$ o $B = 0$.

   (b) Si $AB = AC$, aleshores $A = 0$ o $B = C$.

   (c) $(AB)^t = A^t B^t$.

   (d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   (e) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

   (f) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

   (g) Si $AB = A$ i $BA = B$, llavors $A^2 = A$ i $B^2 = B$.

5. Siguin A i B dues matrius quadrades del mateix ordre. Podem afirmar que les segënts matrius són simètriques?:

   (a) $A + A^t$.

   (b) $AB + A^t B^t$.

   (c) AA^t.

   (d) $AB^t + BA^t$.

6. Calculeu el determinant de les següents matrius:

   (a) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

   (b) $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b+c & a & a \\ b & a+c & b \\ c & c & a+b \end{pmatrix}$.

(d) $A = (a_{ij})$ matriu 3×3 on $a_{ij} = 2^{i \cdot j}$.

(e) $\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d+1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a^2 & (a-2)^2 & (a-4)^2 & (a-6)^2 \\ b^2 & (b-2)^2 & (b-4)^2 & (b-6)^2 \\ c^2 & (c-2)^2 & (c-4)^2 & (c-6)^2 \\ d^2 & (d-2)^2 & (d-4)^2 & (d-6)^2 \end{pmatrix}$.

(f) $\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$, on la matriu és quadrada d'ordre n.

(g) $\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$.

7. Determinant de Vandermonde: Demostreu que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$.

8. Sigui A una matriu quadrada. Direm que A és ortogonal si $AA^t = Id$. Demostreu que:

   (a) Si és A ortogonal, aleshores $\det(A) = \pm 1$.

   (b) A és ortogonal si i només si A és invertible i $A^{-1} = A^t$.

   (c) A és ortogonal si i només si $A^tA = Id$.

   (d) A és ortogonal si i només si A^t és ortogonal.

9. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

   (a) Verifiqueu que és ortogonal.

   (b) Busqueu la imatge de les rectes $r_1 : x + y = 6$, $r_2 : 2x - 3y = 5$.

   (c) Comproveu que l'angle entre les rectes r_1 i r_2 és el mateix que entre les seves imatges.

10. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

   (a) Busqueu la imatge de les rectes $r_1 : x + y = 6$, $r_2 : 2x - 3y = 5$

   (b) Què passa amb els angles entre les rectes r_1 i r_2 i entre les seves imatges?

11. Donada la transformació del pla caracteritzada per la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Busqueu vectors que conservin la direcció.

12. Siguin A i B matrius quadrades d'ordre n. Demostreu que:

    (a) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.

    (b) $Tr(AB) = Tr(BA)$.

    (c) Si A és tal que $Tr(AC) = 0$ per a tota matriu quadrada C d'ordre n, llavors $A = 0$. (Indicació: Vegeu que a_{ij} és la traça de AC_{ij} per a certa matriu C_{ij}).

13. Direm que dues matrius quadrades A i B són semblants si existeix una matriu C invertible tal que $B = C^{-1}AC$. Direm que dues matrius quadrades A i B són equivalents si existeixen matrius invertibles R i S tals que $B = RAS$. Demostreu o doneu un contraexemple a cada una de les següents afirmacions:

    (a) Si A i B són equivalents llavors $\det(A) = \det(B)$.

    (b) Si A i B són semblants llavors $\det(A) = \det(B)$.

    (c) Si A i B són equivalents llavors, $\det(A) = 0$ si i només si $\det(B) = 0$.

    (d) Si A i B són semblants llavors, $\det(A) = 0$ si i només si $\det(B) = 0$.

14. Calculeu el rang de les matrius:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -11 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -7 & 4 & 21 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. Calculeu les inverses de les matrius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

16. Sigui la matriu depenent del paràmetre z

$$M(z) = \begin{pmatrix} z & 0 & 1-z & 1 \\ 1 & 1 & z & 0 \\ 1 & -1 & 0 & z \\ z & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

    (a) Calculeu $M(0)^2$

    (b) Trobeu els valors de z que anul·len $\det M(z)$.

17. Donats dos vectors del pla $u = (a_1, a_2)$ i $v = (b_1, b_2)$ considereu el seu determinant

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

    Demostreu que aquest determinant és igual al producte dels mòduls dels vectors pel sinus de l'angle que formen entre ells. Deduiu d'aquí que (llevat d'un signe) el determinant és igual a l'àrea del paral·lelogram que determinen els dos vectors.

18. El resultat anterior és general. El determinant de n vectors de $\mathbb{R}^n$ és (llevat d'un signe) igual al volum (hipervolum si $n > 3$) del poliedre que generen. Interpreteu geomètricament la linealitat del determinant i el fet que sigui 0 si i només si els vectors són linealment dependents.

19. (a) Busqueu per a quins valors del paràmetre λ s'anul·la el polinomi

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 7 & 7 \\ 7 & \lambda & 5 \\ 5 & 5 & \lambda \end{vmatrix}$$

(b) Considerant la transformació en $\mathbb{R}^3$ que té per matriu la donada en l'apartat a), busqueu els vectors que van a parar a l'origen de coordenades, en els casos $\lambda = -5$, $\lambda = 2$.

20. Sigui $A = (C_1, C_2, C_3)$ una matriu 3×3 on C_1, C_2, C_3 són les seves columnes.

(a) Si $\det A = 2$, calculeu el determinant de la matriu B on:
i. $B = (C_1 + 2C_2, C_1, C_1 + C_2 + C_3)$ ii. $B = (C_1 + C_2, C_1, C_1 + C_2 + 2C_3)$
iii. $(C_1 + C_2 + C_3, C_1 + C_2, C_2 + C_3)$

(b) Determineu $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A) = \lambda \det(C_1 + C_3,\, C_2,\, C_3 - C_1)$.

(c) Si A és invertible, demostreu que, aleshores, també ho és la matriu B on:
i. $B = (C_1, C_2 + 4C_1, C_3 + 2C_2 + 8C_1)$ ii. $B = (C_1, C_2 + 9C_1, C_3 + 3C_2 + 27C_1)$

21. Resoleu els següents sistemes per Gauss:

(a) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -3z & =4 \\ 2x & +y & +z & =5 \\ 3x & +y & +5z & =6 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -y & +z & =7 \\ x & +2y & -5z & =2 \\ x & -3y & +6z & =9 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -z & +3t & =8 \\ 2x & -y & +z & -2t & =0 \\ x & +3y & +2z & +t & =4 \\ 3x & +5y & -4z & -t & =-6 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rrrrrl} x & +y & +z & +t & +u & =1 \\ x & -y & +z & -t & -u & =2 \\ x & +y & -z & +t & -u & =-1 \end{array}\right.$

22. Donat el sistema d'equacions lineals depenent del paràmetre a

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + az + t & = & 1 \\ x - y + t & = & 0 \\ ay + 2z + t & = & 1 \\ x - y - z & = & 1 \end{array}\right\}$$

calculeu el determinant de la matriu del sistema. Per a quins valors de a podem assegurar que el sistema té solució única? En aquest cas trobeu-la. Acabeu d'estudiar que passa en els altres casos.

23. Discutiu els següents sistemes segons els valors dels paràmetres:

(a) $\left\{\begin{array}{rrrrl} ax & +y & +z & +t & =1 \\ x & +ay & +z & +t & =b \\ x & +y & +az & +t & =b^2 \\ x & +y & +z & +at & =b^3 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rrrl} a^2x & +y & +z & =3 \\ x & +a^2y & +z & =4-a \\ x & +y & +a^2z & =2+a^2 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrl} x & -2y & =3(a+b) \\ x & -y & =2(a+b)+1 \\ bx & +ay & =b^2-a^2-6 \\ ax & +by & =a^2-b^2+6 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +(1-a)z & =a+2 \\ (1+a)x & -y & +2z & =0 \\ 2x & -ay & +3z & =a+2 \end{array}\right.$

(e) $\begin{cases} 2x+ & \lambda y+ & \lambda^2 z & = 1 \\ 2x+ & \lambda y+ & z & = 0 \\ 2x+ & 2y+ & \lambda z & = 0 \end{cases}$

Espais vectorials

1. Digueu quines de les següents proposicions són certes:

   (a) El conjunt $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ amb } x \in \mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (b) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x + y = 0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (c) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x + y = 2\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (d) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x^2 + y = 0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (e) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x < y\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (f) El conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x + y = z\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (g) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x, y \in \mathbb{Z}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (h) El conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } x + 2z = 7\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (i) El conjunt $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tals que } x^2 + y^2 = 0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (j) El conjunt $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tals que } y = 0\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$

   (k) El conjunt $\{(\lambda + \mu, \lambda - \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (l) El conjunt $\{(\lambda^2 + \mu, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (m) El conjunt $\{(\lambda + \mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (n) El conjunt $\{(\lambda + 2, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (o) El conjunt de les solucions d'un sistema compatible $Ax = b$ de 2 equacions i 2 incògnites amb coeficients en $\mathbb{R}$, és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (p) El conjunt de les solucions d'un sistema compatible $Ax = b$ de 3 equacions i 3 incògnites amb coeficients en $\mathbb{R}$, és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Indiqueu si els següents conjunts de vectors són linealment independents. Trobeu la relació de dependència en cas que no ho siguin:

   (a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ i $u_3 = (0, 0, 1)$.

   (b) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ i $v_3 = (1, 0, 0)$.

   (c) $w_1 = (3, 2, 1)$, $w_2 = (2, 3, 1)$ i $w_3 = (a, 2, 5)$ on a és un paràmetre real.

3. Determineu per a quins valors dels paràmetres reals es té que:

   (a) els vectors $(1, 0), (a, 1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) els vectors $(1, 0), (a, a^2)$ determinen una base de $\mathbb{R}^2$.

   (c) els vectors $(1, 0), (a, b)$ determinen una base de $\mathbb{R}^2$.

   (d) els vectors $(1, -1, 1), (1, 0, a^2), (a, 0, 1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$.

   (e) els vectors $(1, -1, 1), (a, 0, b), (1, 0, -1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$.

   (f) els vectors $(1, a, 1), (1, 0, 0), (2, 1, b)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$.

   (g) els vectors $(a, 1, 0), (b, 0, 1), (c, 0, 0)$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$.

4. Pels següents subespais vectorials: calculeu la seva dimensió, determineu una base, i completeu aquesta base a una base de l'espai.

   (a) $\langle(1, 2), (-1, 2), (4, 5)\rangle \subset \mathbb{R}^2$.

   (b) $\langle(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 0, 0)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

   (c) $\langle(1, 2, 3), (2, 3, 5), (-1, 3, 2)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

   (d) $\langle(1, a), (-1, 2)\rangle \subset \mathbb{R}^2$ on a és un paràmetre real.

   (e) $\langle(1, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\rangle \subset \mathbb{R}^3$ on a és un paràmetre real.

(f) $\langle(1,1,1),(1,a,1),(1,1,a^2)\rangle \subset \mathbb{R}^3$ on a és un paràmetre real.

(g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x+y=0\} \subset \mathbb{R}^2$.

(h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+y=0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+y+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(j) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+y=x+z=0\} \subset \mathbb{R}^3$.

(k) $\{(\lambda, 2\lambda) \in \mathbb{R}^2$ amb $\lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(l) $\{(\lambda+\mu, \lambda-\mu) \in \mathbb{R}^2$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(m) $\{(\lambda, 2\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ amb $\lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(n) $\{(\lambda+\mu, \lambda-\mu, \mu) \in \mathbb{R}^3$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(o) $\{(\lambda+\mu, 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

5. Determineu les equacions que defineixen els següents subespais vectorials:

(a) $\langle(1,2)\rangle \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $\langle(1,2),(-1,-2)\rangle \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\langle(1,2),(1,-2)\rangle \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $\langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

(e) $\langle(1,-1,1),(0,0,1),(-2,2,0)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

(f) $\langle(1,-1,0)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

(g) $\langle(0,0,1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.

6. Siguin F_1, F_2 dos subespais vectorials de $\mathbb{R}^2$. Demostreu que $F_1 \cup F_2$ és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$ si, i només si, o bé $F_1 \subset F_2$ o bé $F_2 \subset F_1$.

7. Considerem els següents subespais:

(a) En $\mathbb{R}^2$: $F = \langle(1,2)\rangle$ i $G = \langle(2,1)\rangle$.

(b) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(1,2,1),(3,1,5)\rangle$ i $G = \langle(1,2,1),(3,1,5),(3,-4,7)\rangle$.

(c) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(2,1,-1),(8,-5,1),(1,-4,2)\rangle$ i $G = \langle(11,-8,2)\rangle$.

(d) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(1,2,-1),(2,-3,2)\rangle$ i $G = \langle(4,1,3),(-3,1,2)\rangle$.

(e) En $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x = 2y\}$ i $G = \langle(-2,-1),(0,1)\rangle$.

(f) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+z=y\}$ i $G = \langle(1,1,0),(0,1,-1),(1,0,1)\rangle$.

(g) En $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x+y=0\}$ i $G = \{(\alpha+\mu, -\mu) \in \mathbb{R}^2$, on $\alpha, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(h) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+y-z=0\}$ i $G = \{(\alpha+\mu, \beta+\mu, \alpha+\beta+2\mu) \in \mathbb{R}^3$, on $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(i) En $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x-y=x+y=0\}$ i $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x=0\}$.

(j) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x-y-z=0\}$ i $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x-y=z=0\}$.

En cada cas: Trobeu una base i la dimensió dels subespais vectorials F, G i $F \cap G$. Defineixen F i G el mateix subespai? Podem completar una base de F a una base de G? Podem completar una base de G a una base de F?

8. Sigui $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Considerem els següents subespais vectorials:

(a) En $\mathbb{R}^2$: $F = \langle(1,-1),(-3,3)\rangle$ i $G_a = \langle(a,1),(a^2,1)\rangle$.

(b) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(1,-1,0),(1,0,-1)\rangle$ i $G_a = \langle(0,0,a^2-4)\rangle$.

(c) En $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x+y=0\}$, i $G_a = \{(\lambda a + (2+a)\mu, \lambda+\mu) \in \mathbb{R}^2$ amb $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(d) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+y=2z\}$, i $G_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x+ay = x-y-2z=0\}$.

Per a quins valors del paràmetre real a es té que $F \cap G_a = \{0\}$.

9. Siguin $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,0)$ i $u_3 = (0,0,1)$.

   (a) Escriviu $v = (2,2,-4)$ com combinació lineal de u_1,u_2 i u_3. És única?

   (b) Repetiu l'exercici prenent $u_3 = (1,0,0)$.

10. Demostreu que els vectors $v_1 = (1,1)$ i $v_2 = (-1,1)$ determinen una base de $\mathbb{R}^2$. Determineu les coordenades dels vectors $(1,1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ i $(2,3)$ en aquesta base.

11. Demostreu que els vectors $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ i $v_3 = (-1,0,0)\}$ determinen una base de $\mathbb{R}^3$. Determineu les coordenades dels vectors $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ i $(1,2,3)$ en aquesta base.

12. Sigui $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Considerem els vectors $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$, $u_3 = e_3$, i els vectors $v_1 = e_1$, $v_2 = e_1 + e_2$, $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Demostreu que $B_u = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B_v = \{v_1, v_2, v_3\}$ també són bases de $\mathbb{R}^3$. Determineu les coordenades del vector $w = ae_1 + be_2 + ce_3$ en la base B, en la base B_u i en la base B_v.

13. En $\mathbb{R}^3$ considerem les bases $B_1 = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$ i $B_2 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$. Sigui $v \in \mathbb{R}^3$ un vector amb coordenades (x,y,z) en la base B_1, i amb coordenades (x', y', z') en la base B_2. Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z'.

14. Demostreu que $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ i $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ són bases de $\mathbb{R}^3$ on $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$, i on $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$, $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Trobeu les coordenades en la base canònica i en la base B' d'un vector v de $\mathbb{R}^3$ que té coordenades (a,b,c) en la base B.

15. Digueu quines de les següents aplicacions són lineals:

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y) = (x+y, xy)$.

    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y) = (0,0)$.

    (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y) = (7, x+y)$.

    (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y,z) = (x+3y, x-y+z)$.

    (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$.

    (f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y,z) = (x+y+3, x-y, z)$.

    (g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y,z) = (x+y, x+z, x-y+z^2)$.

    (h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y,z) = (x, |y|, z)$.

16. Per a cada una de les següents aplicacions lineals: digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva; calculeu $f^{-1}(\{0\})$ i $\mathrm{Im}f$; i determineu l'aplicació inversa f^{-1} en cas que existeixi.

    (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y) = (x+y, -y)$.

    (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y) = (x-y, 2x+3y, 3x+2y)$.

    (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z)$.

    (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$.

17. Per a les següents aplicacions lineals f_1 i f_2, digueu si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

    (a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z)$, $f_2(x,y,z) = (x+z, y+z)$.

    (b) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_1(x,y) = (x, x+y, x-y)$, $f_2(x,y,z) = (x-y, x+y+z, x-z)$.

    (c) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1(x,y) = (x, x+y)$, $f_2(x,y) = (y, x-y)$.

    (d) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_1(x,y,z) = (x, x+y, x-y)$, $f_2(x,y,z) = (x-y, x+y+z, x-z)$.

18. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x,y) = (x/2 + y, x/4 + y/2)$. Demostreu que $f^2 = f$.

19. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y) = (x - y, -x + y, ax + y)$ on a és un paràmetre real. Calculeu $f^{-1}(\{0\})$ i Imf segons els valors de a. Determineu, si existeixen, els valors del paràmetre a pels que f és un monomorfisme, un epimorfisme i un isomorfisme.

20. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (3x-3y+4z, 2x+4y-5z, 8x+7y-9z)$. Justifiqueu si l'element $(-5, 4, 8)$ té o no antiimatge per f. En cas afirmatiu, és única?.

21. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (x + az, x + ay, ay + z)$ on a és un paràmetre real. Per a quins valors del paràmetre a l'endomorfisme f és un isomorfisme? Per a quins valors del paràmetre a podem afirmar que tot vector $v \in \mathbb{R}^3$ té antiimatge per f?

22. Siguin $u = (5, 4, 1)$, $v = (3, -4, 1)$ i $w = (1, -2, 3)$ Quins parells d'aquests vectors són ortogonals?

23. Determineu per a quins valors dels paràmetres els següents conjunts de vectors són ortogonals:

    (a) En $\mathbb{R}^2$ els vectors $(1, -1)$ i (a, b).
    (b) En $\mathbb{R}^2$ els vectors $(1, -1)$ i $(a, 1)$.
    (c) En $\mathbb{R}^2$ els vectors $(1, -1)$ i $(1, b)$.
    (d) En $\mathbb{R}^2$ els vectors $(1, -1)$ i (a, a^2).
    (e) En $\mathbb{R}^3$ els vectors $(1, k, -3)$ i $(2, -5, 4)$.
    (f) En $\mathbb{R}^3$ els vectors $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ i $(1, a, b)$.
    (g) En $\mathbb{R}^3$ els vectors $(1, -1, 0)$, $(0, a, 1)$ i $(0, 1, a^2)$.

24. Considerem els següents subespais vectorials:

    (a) En $\mathbb{R}^2$: $F = \langle(1, -1)\rangle$.
    (b) En $\mathbb{R}^2$: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x + 2y = 0\}$.
    (c) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(1, -1, 1)\rangle$.
    (d) En $\mathbb{R}^3$: $F = \langle(1, -1, 1), (1, 0, 1)\rangle$.
    (e) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x + y = z\}$.
    (f) En $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3$ tals que $x + y = y + z = 0\}$.

    En cada cas determineu la dimensió, una base i les equacions del subespai $F^{\perp}$.

25. Donat $u = (3, -12, -4)$ trobeu la seva norma i un vector unitari en la seva direcció.

26. Determineu el valor de k per a que $\|v\| = 29$ amb $v = (-1, k, 2)$.

27. Demostreu que als espais euclidians $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ es verifiquen les següents propietats:

    (a) Si v_1 i v_2 són vectors ortogonals, aleshores $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$.
    (b) $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1 - v_2\|^2$ si i només si $v_1 \perp v_2$.
    (c) $\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2$ per a tot v_1, v_2.
    (d) $4 < v_1, v_2 >= \|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1 - v_2\|^2$ per a tot v_1, v_2.
    (e) $2 < v_1, v_2 >= \|v_1 + v_2\|^2 - \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2$ per a tot v_1, v_2.

28. Donats $u, v \in \mathbb{R}^2$ linealment independents, determineu el valor del nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que u i $v_1 = v - \alpha u$ siguin ortogonals.

29. Calculeu l'angle entre els vectors u i v on:

    (a) $v = (1, 2)$, $u = (2, -4)$.
    (b) $u = (1, \sqrt{3})$, $v = (1, -\sqrt{3})$.
    (c) $v = (1, 1, 1)$, $u = (\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

(d) $u = (2, -2, 0)$, $v = (3, 0, 1)$.

30. Trobeu la distància $d(u, v)$ entre els vectors u i v

    (a) $u = (1, 7)$, $v = (6, -5)$.

    (b) $u = (3, -5, 4)$, $v = (6, 2, -1)$.

    (c) $u = (5, 3)$, $v = (2, -5)$.

31. Donats $u = (k, 2, 1)$ i $v = (2, -1, 3)$ trobeu un nombre k tal que

    (a) $d(u, v) = 7$.

    (b) $(\widehat{v, w}) = \pi/3$.

32. Donats els vectors $u = (2, -3, 4)$, $v = (3, 1, -2)$ i $w = (1, 5, 3)$ calculeu $u \wedge v$, $u \wedge w$ i $v \wedge w$.

33. Demostreu que el producte vectorial verifica les següents propietats:

    (a) $v \wedge w = -(w \wedge v)$ per a tot $v, w \in \mathbb{R}^3$.

    (b) $(v_1 + v_2) \wedge w = (v_1 \wedge w) + (v_2 \wedge w)$ per a tot $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3$.

    (c) $(\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w) = \lambda(v \wedge w)$ per a tot $v, w \in \mathbb{R}^3$ i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$.

    (d) $v \wedge v = 0$ per a tot $v \in \mathbb{R}^3$.

    (e) $v \wedge w \in \langle v, w \rangle^\perp$ per a tot $v, w \in \mathbb{R}^3$.

    (f) $\|v \wedge w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin(\widehat{v, w})$ per a tot $v, w \in \mathbb{R}^3$.

34. Trobeu un vector unitari ortogonal a $u = (1, 3, 4)$ i $v = (2, -6, 5)$.

35. Es diu que una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és ortogonal si conserva el producte escalar (per tant, les distàncies i els angles), és a dir $< f(u), f(v) >=< u, v >$ per tot $u, v \in \mathbb{R}^2$. Digueu si les següents aplicacions són ortogonals:

    (a) $f(x, y) = (x, x + y)$.

    (b) $g(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y, x - y)$.