

Suma de dues variables aleatòries

13 d'octubre de 2008

Suma de variables aleatòries

Donades dues variables aleatòries X i Y , la funció de distribució de probabilitat de la seva suma, $Z = X + Y$, es pot obtenir de la manera següent:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P((X, Y) \in D_z), \quad (1)$$

on

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq z\}$$

és el semiplà representat a la Figura 1.

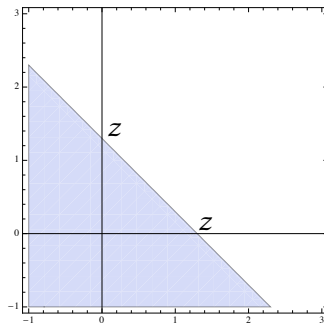


Figura 1: regió D_z

Si X i Y són variables aleatòries contínues, amb funció de densitat de probabilitat conjunta $f_{XY}(x, y)$, la probabilitat (1) es pot calcular com:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P((X, Y) \in D_z) = \iint_{D_z} f_{XY}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y) \, dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x, y) \, dx \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Derivant respecte de z obtenim la funció densitat de probabilitat:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) \, dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y, y) \, dy \end{cases} \quad (3)$$

Una altra forma d'obtenir les expressions (3) és introduint una variable aleatòria auxiliar, per exemple $T = Y$, i fer servir el teorema del canvi de variables. En efecte, si considerem

$$Z = X + Y, \quad T = Y,$$

el sistema d'equacions associat

$$\begin{cases} z = g(x, y) = x + y \\ t = h(x, y) = y \end{cases}$$

té solució única

$$x = z - t, \quad y = t$$

i el seu determinant jacobinà val

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Per tant,

$$f_{ZT}(z, t) = f_{XY}(x, y) \Big|_{(x,y)=(z-t,t)} = f_{XY}(z - t, t).$$

Així,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{ZT}(z, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z - t, t) dt,$$

que és la segona de les expressions (3). Podeu comprovar que la primera d'aquestes expressions s'obté si usem $T = X$ com a variable auxiliar.

Una cas particular important de les expressions (3) és quan X i Y són independents. Llavors, $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ i, per tant,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y) dy \end{cases} \quad (4)$$

Les expressions (4) corresponen a la convolució de les funcions f_X i f_Y :

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z).$$

Teorema 1 Si X i Y són variables aleatòries contínues i independents, i $Z = X + Y$, aleshores

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x) dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y) dy \end{cases}$$

Exemple: Siguin X i Y variables aleatòries gaussianes d'esperança 0 i variància σ^2 , i independents. Tenim,

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(z-y)^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)} dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-((z-y)^2+y^2)/(2\sigma^2)} dy.$$

Però,

$$(z-y)^2 + y^2 = \frac{z^2}{2} + \left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y\right)^2,$$

i, per tant,

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-z^2/(4\sigma^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z/\sqrt{2}-\sqrt{2}y)^2/(2\sigma^2)} dy.$$

Fent, ara, el canvi

$$\frac{z}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y = t,$$

tenim

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-z^2/(4\sigma^2)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\sigma} e^{-z^2/(4\sigma^2)},$$

que correspon a una densitat de probabilitat gaussiana d'esperança 0 i variància $2\sigma^2$.

Suposem, ara, que X i Y són variables discretes i independents que prenen valors enters no negatius. Si $Z = X + Y$ tenim

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(X + Y = n) = \sum_{k \geq 0} P(X + Y = n | Y = k) P(Y = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X = n - k | Y = k) P(Y = k) = \sum_{k=0}^n P(X = n - k) P(Y = k), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

on hem tingut en compte que, per ser X i Y independents, es compleix $P(X = n - k | Y = k) = P(X = n - k)$.

Teorema 2 Si X i Y són variables aleatòries discretes, independents, i $Z = X + Y$, aleshores

$$P(Z = n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n P(X = n - k) P(Y = k) \\ \sum_{k=0}^n P(X = k) P(Y = n - k) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aquestes expressions corresponen a la convolució discreta de les funcions de probabilitat de X i Y .

Exemple: Siguin X i Y variables aleatòries de Poisson amb paràmetres λ_X i λ_Y , respectivament, i independents. Aleshores,

$$P(Z = n) = P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = n - k) P(Y = k)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_X} \frac{\lambda_X^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_Y} \frac{\lambda_Y^k}{k!} = \frac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_Y^k \lambda_X^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_Y^k \lambda_X^{n-k} = e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)} \frac{(\lambda_X + \lambda_Y)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Per tant, $Z = X + Y$ segueix també la llei de probabilitat de Poisson, amb paràmetre $\lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y$.

Un exemple llarg

Donades les variables aleatòries X i Y , uniformes en $(0, 1)$ i independents, siguin

$$S = X + Y, \quad Z = \max(X, Y).$$

Volem determinar les funcions $F_{SZ}(s, z)$, $f_{SZ}(s, z)$ i $E(S|Z)$.

La funció de densitat conjunta de X i Y és:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in Q \\ 0, & \text{altrament} \end{cases},$$

on Q és el quadrat $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Calculem, en primer lloc, la funció de distribució conjunta $F_{SZ}(s, z)$.

$$F_{SZ}(s, z) = P(S \leq s, Z \leq z) = P(X + Y \leq s, \max(X, Y) \leq z). \quad (5)$$

Per tal de calcular la probabilitat (5) distingim els casos següents:

1. Sigui $s < 0$ o $z < 0$. Si $s < 0$ tenim $\{X + Y \leq s\} = \emptyset$ i si $z < 0$ tenim $\{\max(X, Y) \leq z\} = \emptyset$. En qualsevol cas,

$$F_{SZ}(s, z) = P(\emptyset) = 0.$$

2. Sigui $s > 2, z > 1$. En aquest cas, $\{X + Y \leq s\} = \Omega$ i $\{\max(X, Y) \leq z\} = \Omega$. Per tant,

$$F_{SZ}(s, z) = P(\Omega) = 1.$$

3. Cas $1 < s < 2, z > 1$. Com que $z > 1$ tenim $\{\max(X, Y) \leq z\} = \Omega$, i

$$F_{SZ}(s, z) = P(X + Y \leq s, \Omega) = P(X + Y \leq s).$$

Per tant, si $H_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq s\}$ i $D_s = H_s \cap Q$ (vegeu la Figura 2), tenim

$$\begin{aligned}
F_{SZ}(s, z) &= P(X + Y \leq s) = \iint_{H_s} f_{XY}(x, y) \, dx dy \\
&= \iint_{D_s} dx dy = a(D_s) = 1 - \frac{(2-s)^2}{2}.
\end{aligned}$$

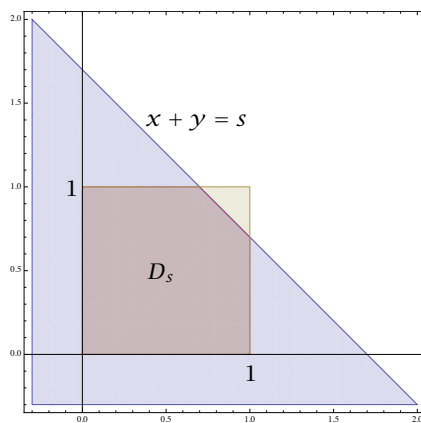


Figura 2: regió D_s , $1 < s < 2$

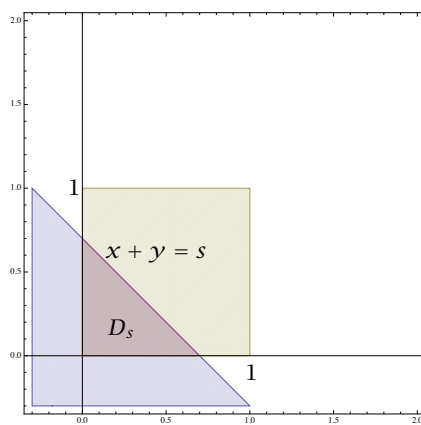


Figura 3: regió D_s , $0 < s < 1$

4. Cas $0 < s < 1, z > 1$. Com abans,

$$F_{SZ}(s, z) = P(X + Y \leq s) = \iint_{H_s} f_{XY}(x, y) \, dx dy = \iint_{D_s} dx dy = a(D_s),$$

on ara $D_s = H_s \cap Q$ és com es mostra a la Figura 3. Per tant,

$$F_{SZ}(s, z) = \frac{s^2}{2}.$$

5. Sigui $s > 2, 0 < z < 1$. Ara, com que $s > 2$, tenim $\{X + Y \leq s\} = \Omega$. Per tant,

$$F_{SZ}(s, z) = P(\Omega, \max(X, Y) \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z).$$

Així, si $Q_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x, y) \leq z\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq z, y \leq z\}$ i $D_z = Q_z \cap Q$ (vegeu la Figura 4), tenim

$$\begin{aligned} F_{SZ}(s, z) &= P(\max(X, Y) \leq z) = \iint_{Q_z} f_{XY}(x, y) \, dx dy \\ &= \iint_{D_z} dx dy = a(D_z) = z^2. \end{aligned}$$

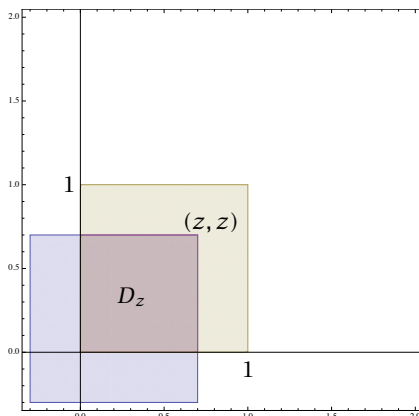


Figura 4: regió $D_z, 0 < z < 1$

6. Cas $0 < s < 2, 0 < z < 1, s > 2z$. En aquest cas la regió associada a la funció màxim, $Q_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x, y) \leq z\}$, està continguda en la regió associada a la funció suma, $H_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq s\}$. Si $D_z = Q_z \cap Q$ tenim (vegeu la Figura 5):

$$\begin{aligned} F_{SZ}(s, z) &= P(X + Y \leq s, \max(X, Y) \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) \\ &= \iint_{Q_z} f_{XY}(x, y) \, dx dy = \iint_{D_z} dx dy = a(D_z) = z^2. \end{aligned}$$

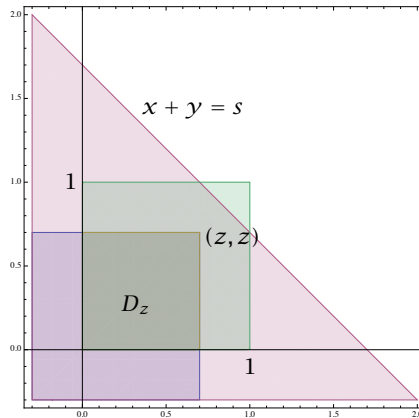


Figura 5: regió D_z , $0 < s < 2$, $0 < z < 1$, $s > 2z$.

7. Cas $0 < s < 2$, $0 < z < 1$, $z < s < 2z$. Siguin, com abans, $H_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq s\}$ i $Q_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(x, y) \leq z\}$ les regions associades a les funcions suma i màxim, respectivament.

$$F_{SZ}(s, z) = P(X + Y \leq s, \max(X, Y) \leq z) = \iint_{H_s \cap Q_z} f_{XY}(x, y) \, dx dy.$$

Però $D_{sz} = H_s \cap Q_z \subset Q$ (Figura 6) i, per tant,

$$F_{SZ}(s, z) = \iint_{D_{sz}} dx dy = a(D_{sz}) = z^2 - \frac{(2z - s)^2}{2}.$$

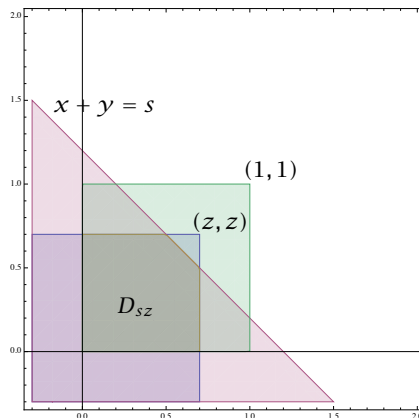


Figura 6: regió D_{sz} , $0 < s < 2$, $0 < z < 1$, $z < s < 2z$.

8. Finalment, sigui $0 < s < 1$, $0 < z < 1$, $s < z$. Vegeu la Figura 7. Raonant com en els casos anteriors:

$$F_{SZ}(s, z) = \iint_{D_s} dx dy = a(D_s) = \frac{s^2}{2}.$$

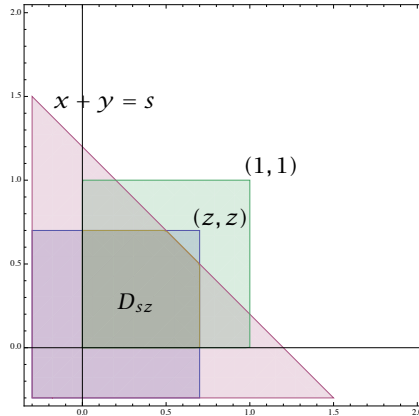


Figura 7: regió D_s , $0 < s < 1$, $0 < z < 1$, $s < z$.

La Figura 8 agrupa els diferents casos analitzats i la Figura 9 mostra la gràfica de $F_{SZ}(s, z)$.

La densitat de probabilitat conjunta de S i Z val

$$f_{SZ}(s, z) = \frac{\partial^2 F_{SZ}(s, z)}{\partial s \partial z} \begin{cases} 2, & 0 < z < 1, z < s < 2z \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad (6)$$

Noteu que la derivada segona de l'expressió anterior només és diferent de 0 en la regió corresponent al cas 7, on $F_{SZ}(s, z) = z^2 - (2z - s)^2/2$.

La funció de distribució de $Z = \max(X, Y)$ la podem calcular com a distribució marginal de $F_{SZ}(s, z)$:

$$F_Z(z) = \lim_{s \rightarrow \infty} F_{SZ}(s, z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

Noteu que el límit ja s'assoleix per a $s > 2$. També podem calcular $F_Z(z)$ directament:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\max(X, Y) \leq z) = P(X \leq z, Y \leq z) \\ &= P(X \leq z)P(Y \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

on hem tingut en compte que els esdeveniments $\{X \leq z\}$ i $\{Y \leq z\}$ són independents.

La densitat de probabilitat de Z és:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z, & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

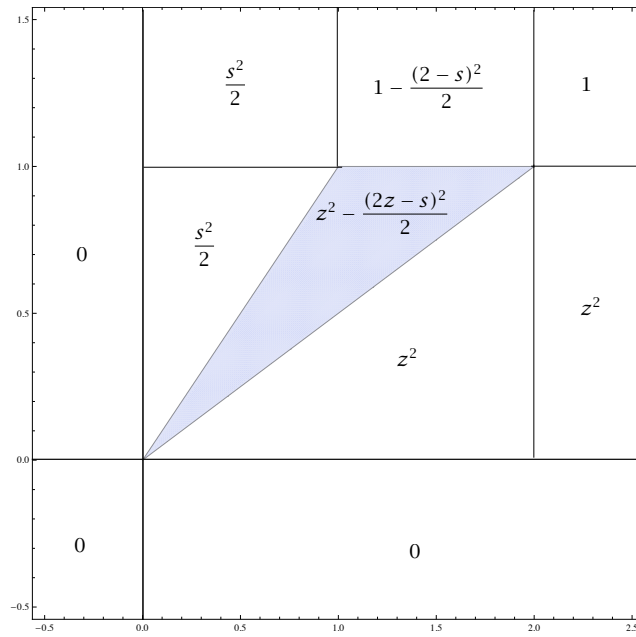


Figura 8: $F_{SZ}(s, z)$

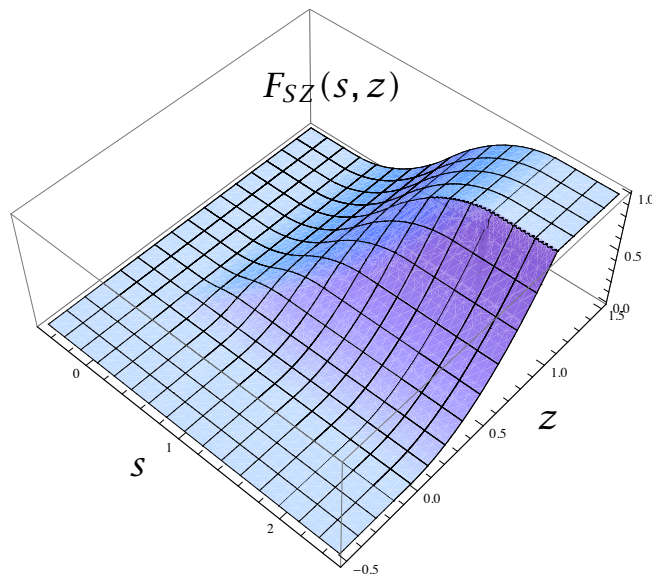


Figura 9: $F_{SZ}(s, z)$

Si $0 < z < 1$, la funció densitat condicionada $f_{S|Z}(s|Z = z)$ està definida i val

$$f_{S|Z}(s|Z = z) = \frac{f_{SZ}(s, z)}{f_Z(z)} = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z < s < 2z \\ 0, & \text{altrament} \end{cases} \quad (7)$$

Observeu que la densitat de S condicionada per $\{Z = z\}$ és uniforme a l'interval $(z, 2z)$. Per tant,

$$E(S|Z = z) = \int_{-\infty}^{\infty} s f_{S|Z}(s|Z = z) ds = \int_z^{2z} s \frac{1}{z} ds = \frac{3}{2}z.$$

Així,

$$E(S|Z) = \frac{3}{2}Z.$$

Vegem ara com, fent ús de teorema del canvi de variables, podem obtenir directament $f_{SZ}(s, z)$. El sistema d'equacions associat a

$$S = X + Y, \quad Z = \max(X, Y),$$

és

$$\begin{cases} s = g(x, y) = x + y \\ z = h(x, y) = \max(x, y) \end{cases}$$

Estudiem com queda transformada la regió $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ per la transformació $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per les funcions g i h . Noteu que si $(a, b) \in Q$, $a > b$, aleshores els punts (a, b) i (b, a) , situats simètricament respecte de la recta bisectriu $x = y$, tenen la mateixa imatge

$$T(a, b) = T(b, a) = (a + b, a).$$

Amb aquesta observació i analitzant com es transforma la frontera de Q , podeu comprovar que la regió imatge per T de Q és

$$T(Q) = \{(s, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < z < 1, z < s < 2z\},$$

i que cada punt $(s, z) \in T(Q)$ és imatge dels dos punts $(x_1, y_1) = (z, s - z)$ i $(x_2, y_2) = (s - z, z)$ de Q . Observeu que la regió $T(Q)$ és la corresponent al cas 7 en l'anàlisi fet anteriorment per a $F_{SZ}(s, z)$.

Així, si $(s, z) \in T(Q)$,

$$f_{SZ}(s, z) = \frac{f_{XY}(x_1, y_1)}{|J(x_1, y_1)|} \Big|_{(x_1, y_1) = (z, s-z)} + \frac{f_{XY}(x_2, y_2)}{|J(x_2, y_2)|} \Big|_{(x_2, y_2) = (s-z, z)}$$

Per calcular el valor dels jacobians observem el següent. El punt $(x_1, y_1) = (z, s - z)$ pertany a la part de la regió Q on $x > y$,

$$(x_1, y_1) \in Q' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x\}.$$

En Q' la transformació T és la definida per les funcions

$$\begin{cases} s = x + y \\ z = \max(x, y) = x \end{cases}$$

Per tant $|J(x_1, y_1)| = 1$. Anàlogament, $(x_2, y_2) \in Q'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, x < y < 1\}$, i la transformació T és ara la definida per

$$\begin{cases} s = x + y \\ z = \max(x, y) = y \end{cases}$$

amb la qual cosa, també $|J(x_2, y_2)| = 1$. Finalment, tenint en compte que $f_{XY}(x_1, y_1) = f_{XY}(x_2, y_2) = 1$, tenim

$$f_{SZ}(s, z) = 2, \quad 0 < z < 1, z < s < 2z,$$

d'acord amb el que havíem obtingut a (6).