

CFIS

Processos Estocàstics

13 de març de 2013

Examen

Temps: 2h 15m

1. A la entrada d'un filtre es té la suma $X = S + N$ del senyal S més el soroll N , on S i N són variables aleatòries independents amb $m_S = \sigma_S^2 = 1$, $m_N = 0$ i $\sigma_N^2 = 1$. Quina ha de ser la sortida del filtre si es vol obtenir la millor estimació lineal de S donada X ? **(2 punts)**
-

2. Donades les variables aleatòries independents A i B considereu el procés estocàstic

$$X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

- (a) Si A i B tenen valor mitjà 0 i variància σ^2 , calculeu l'esperança i l'autocorrelació de $X(t)$. Calculeu també la millor estimació lineal de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$ i l'error de l'estimació.
- (b) Demostreu que si el procés $X(t)$ és estacionari en sentit ampli aleshores $E(A) = E(B) = 0$ i $\text{Var}(A) = \text{Var}(B)$. **(3 punts)**
-

3. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa μ . Si les transicions del procés es marquen amb probabilitat p , independentment unes de les altres, demostreu que la probabilitat que en $(0, t]$ no hi hagi transicions marcades val $e^{-\mu p t}$. Quina llei de probabilitat segueix la variable aleatòria que dona el temps transcorregut fins que es produeix la primera transició marcada? **(3 punts)**
-

4. Sigui $X(t)$ un procés gaussià, estacionari en sentit ampli, amb

$$m_X = 0, \quad R_X(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}.$$

Indiqueu, justificant les respostes, quines de les proposicions següents són certes i quines són falses.

- (a) $X(t)$ i $X(t + \tau)$ són, per a tot t , variables aleatòries incorrelades.
- (b) $E(X^2(t)) = \arctan t$.
- (c) $E(X^2(t)X^2(t + \tau))$ és independent de t .
- (d) $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà. **(2 punts)**