CFIS
Processos Estocàstics

13 de març de 2013 **Examen** **Temps: 2h 15m**

---

1. A la entrada d'un filtre es té la suma $X = S + N$ del senyal S més el soroll N, on S i N són variables aleatòries independents amb $m_S = \sigma_S^2 = 1$, $m_N = 0$ i $\sigma_N^2 = 1$. Quina ha de ser la sortida del filtre si es vol obtenir la millor estimació lineal de S donada X?

Solució: Sigui $\hat{S} = aX + b$. Aplicant el principi d'ortogonalitat i tenint en compte que

$$\mathrm{E}(S^2) = \sigma_S^2 + m_S^2 = 2, \quad \mathrm{E}(SN) = \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(N) = 0, \quad \mathrm{E}(N^2) = \sigma_N^2 + m_N^2 = 1,$$

obtenim les equacions:

$$0 = \mathrm{E}(S - \hat{S}) = \mathrm{E}(S) - a\mathrm{E}(S + N) - b = 1 - a - b$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{E}((S - \hat{S})X) = \mathrm{E}((S - a(S + N) - b)(S + N)) \\ &= \mathrm{E}(S^2) - a(\mathrm{E}(S^2) + \mathrm{E}(N^2) - b(\mathrm{E}(S) + \mathrm{E}(N) = 2 - 3a - b \end{aligned}$$

La solució és $a = b = 1/2$ i, per tant, la sortida del filtre ha de ser

$$\hat{S} = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}.$$

---

2. Donades les variables aleatòries independents A i B considereu el procés estocàstic

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

(a) Si A i B tenen valor mitjà 0 i variància σ^2, calculeu l'esperança i l'autocorrelació de $X(t)$. Calculeu també la millor estimació lineal de $X(t_2)$ donat $X(t_1)$ i l'error de l'estimació.

(b) Demostreu que si el procés $X(t)$ és estacionari en sentit ampli aleshores $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$ i $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B)$.

Resolució:

(a) Tenim $\mathrm{E}(A) = \mathrm{E}(B) = 0$, $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2) = \sigma^2$, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B) = 0$. L'esperança i l'autocorrelació del procés valen

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(A)\cos(\omega t) + \mathrm{E}(B)\sin(\omega t) = 0;$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathrm{E}\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \mathrm{E}\left((A\cos(\omega t_1) + B\sin(\omega t_1))(A\cos(\omega t_2) + B\sin(\omega t_2))\right) \\ &= \sigma^2(\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)) = \sigma^2\cos(\omega\tau), \quad \tau = |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

El procés $X(t)$ és estacionari en sentit ampli.

Per a qualsevol t, la variable aleatòria $X(t)$ té esperança 0 i podem prendre $\widehat{X(t_2)} = \alpha X(t_1)$. Aplicant el principi d'ortogonalitat tenim

$$0 = \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)X(t_1)\right) = R_X(t_1, t_2) - \alpha R_X(t_1, t_1),$$

d'on

$$\alpha = \frac{R_X(t_1,t_2)}{R_X(t_1,t_1)} = \cos(\omega\tau).$$

Per tant,

$$\widehat{X(t_2)} = X(t_1)\cos(\omega\tau).$$

L'error val

$$\begin{aligned}\epsilon &= \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\left(X(t_2) - \widehat{X(t_2)}\right)X(t_2)\right)\\ &= R_X(0) - \cos(\omega\tau)R_X(\tau) = \sigma^2\left(1-\cos^2(\omega\tau)\right).\end{aligned}$$

(b) Tenim

$$m_X(t) = \mathrm{E}(X(t)) = \mathrm{E}(A)\cos(\omega t) + \mathrm{E}(B)\sin(\omega t).$$

Com que $X(t)$ és estacionari, $m_X(t)$ és una funció és constant. Així, particularitzant en $t = 0$ i $t = \pi/\omega$ obtenim $\mathrm{E}(A) = -\mathrm{E}(A)$, d'on $\mathrm{E}(A) = 0$. Anàlogament, particularitzant en $t = \pi/(2\omega)$ i $t = 3\pi/(2\omega)$ obtenim $\mathrm{E}(B) = -\mathrm{E}(B)$, d'on també $\mathrm{E}(B) = 0$.

D'altra banda, tenint en compte que A i B son independents i, per tant, $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B) = 0$, tenim

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2) &= \mathrm{E}\left(X(t_1)X(t_2)\right) = \mathrm{E}\left((A\cos(\omega t_1) + B\sin(\omega t_1))(A\cos(\omega t_2) + B\sin(\omega t_2))\right)\\ &= \mathrm{E}(A^2)\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2) + \mathrm{E}(B^2)\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)).\end{aligned}$$

Si $X(t)$ és estacionari, ha de ser

$$R_X(0,0) = R_X\left(\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right),$$

és a dir, es compleix $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(B^2)$. Per tant, les variables A i B tenen la mateixa variància.

---

3. Sigui $X(t)$ un procés de Poisson de taxa μ. Si les transicions del procés es marquen amb probabilitat p, independentment unes de les altres, demostreu que la probabilitat que en $(0,t]$ no hi hagi transicions marcades val $e^{-\mu p t}$. Quina llei de probabilitat segueix la variable aleatòria que dóna el temps transcorregut fins que es produeix la primera transició marcada?

Resolució:

Tenim

$$\mathrm{P}(X(t) = k) = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

(a) Sigui A l'esdeveniment "en $(0,t]$ no hi ha transicions marcades". Llavors,

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(A \mid X(t) = k)\,\mathrm{P}(X(t) = k)$$

Tenim

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A \mid X(t) = k) =\\ &\quad \mathrm{P}(1^a \text{ transició no marcada}, 2^a \text{ transició no marcada}, \cdots,\\ &\quad k\text{-èsima transició no marcada}) = (1-p)^k\end{aligned}$$

Substituint s'obté:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!} (1-p)^k \\ &= e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu t(1-p))^k}{k!} = e^{-\mu t} e^{\mu t(1-p)} = e^{-\mu p t} \end{aligned}$$

(b) Sigui T la v.a. que dóna el temps fins a la primera transició marcada. Si $t > 0$ tenim

$$F_T(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{P}(T > t) = 1 - \mathrm{P}(0 \text{ transicions marcades en } (0,t]) = 1 - e^{-\mu p t}.$$

El temps transcorregut fins a la primera transició marcada és una v.a. exponencial de paràmetre μp.

---

4. Sigui $X(t)$ un procés gaussià, estacionari en sentit ampli, amb

$$m_X = 0, \qquad R_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}.$$

Indiqueu, justificant les respostes, quines de les proposicions següents són certes i quines són falses.

(a) $X(t)$ i $X(t+\tau)$ són, per a tot t, variables aleatòries incorrelades.
(b) $\mathrm{E}\left(X^2(t)\right) = \arctan t$.
(c) $\mathrm{E}\left(X^2(t)X^2(t+\tau)\right)$ és independent de t.
(d) $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà.

Resolució: Per ser $X(t)$ gaussià i estacionari en sentit ampli, també és estacionari en sentit estricte.

(a) Per a cada t, la covariància de les v.a. $X(t)$ i $X(t+\tau)$ val

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2 = \frac{1}{1+\tau^2} \neq 0.$$

Per tant, la proposició és *falsa*.

(b) Tenim $\mathrm{E}(X^2(t)) = R_X(0) = 1$. La proposició és *falsa*.

(c) El valor mitjà $E\left(X^2(t)X^2(t+\tau)\right)$ depèn, en principi, de $t_1 = t$ i $t_2 = t+\tau$. Però com que $X(t)$ és estacionari en sentit estricte, $E\left(X^2(t)X^2(t+\tau)\right)$ serà independent de l'origen absolut de temps i dependrà només de $\tau = t_2 - t_1$. La proposició és *certa*.

Una altra forma de veure-ho és aplicant el teorema de l'esperança i tenint en compte que la densitat de segon ordre del procés satisfà

$$f_X(x_1, x_2; t, t+\tau) = f_X(x_1, x_2; \tau).$$

Per tant,

$$E\left(X^2(t)X^2(t+\tau)\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; t, t+\tau)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, x_2; \tau)\, dx_1 dx_2 = h(\tau).$$

(d) Un criteri suficient per tenir ergodicitat en valor mitjà és: Si $C_X(0) < \infty$ i $\lim_{\tau\to\infty} C_X(\tau) = 0$, aleshores $X(t)$ és ergòdic en valor mitjà.

En el nostre cas el criteri es compleix ja que

$$C_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}.$$

La proposició és, doncs, *certa*.
